Etude d’une Suspension Magnétique Active pour Turbocompresseur
Eléments de correction

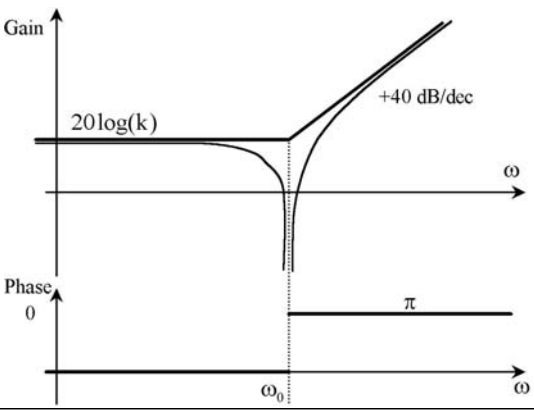
A. CARACTERISTIQUES D’UNE SUSPENSION

A.1 Données préliminaires

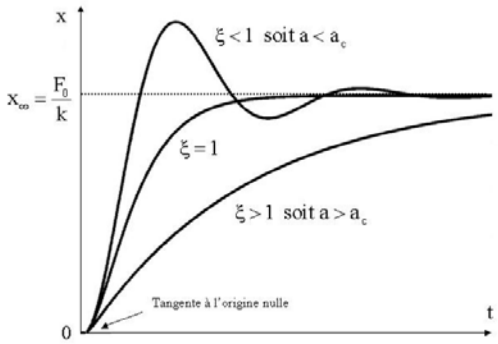
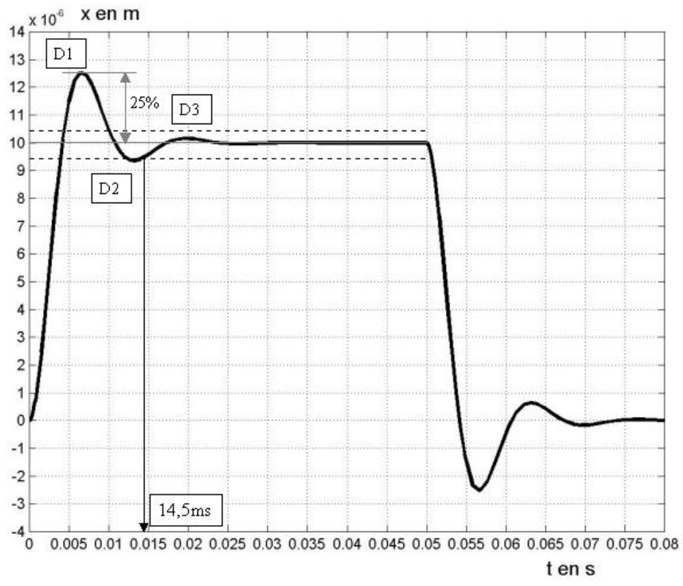
A.1.1	$N_{max} = 28500$ tr/min soit $\Omega_{max} = 2984,5$ rad/s
A.1.2	$m = \dfrac{F_B}{d\Omega_{max}^2} = \dfrac{87,5}{10.10^{-6}\left(2984,5\right)^2} = 0,98$ kg
A.1.3	$F_{Bf_0} = md\Omega_0^2 = 0,98 \times 10.10^{-6} \times \left(2\pi \times 83\right)^2 = 2,66$ N
A.1.4	$e_0 = 450\ \mu m$ et $\Delta e_{max} = 20\%\ e_0 = 0,2 \times 0,45.10^{-3} = 90\ \mu m$
A.1.5	M’ = 24,64 kg

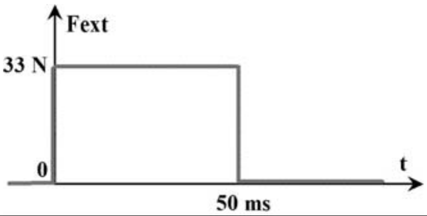
A.2 Suspension classique

Modélisation par un système masse-ressort

A.2. 1	$M\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_{ext} - kx$
A.2.2	$Mp^2X(p) + kX(p) = F_{ext}(p)$ soit $H_{mr}(p) = \dfrac{X(p)}{F_{ext}(p)} = \dfrac{1}{Mp^2 + k}$ $H_{mr}(p) = \dfrac{1/k}{1+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$
A.2.3	 $K_{mr}(p) = k\left(1+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2\right)$ La courbe réelle de la phase est confondue avec la courbe asymptotique.
A.2.4	La raideur est nulle à la pulsation ω_0 (pulsation de résonance). En théorie, lors de la moindre perturbation (F_{ext}), la suspension peut entrer en résonance. En pratique, il existe toujours un faible amortissement dû aux pertes qui empêche les suspensions d’entrer en résonance d’elles mêmes.

Modélisation par un système masse-ressort avec amortissement

A.2.5	$M\dfrac{d^2x}{dt^2}=F_{ext}-kx-a\dfrac{dx}{dt}$
A.2.6	$H_{mra}(p)=\dfrac{1}{k+ap+Mp^2}=\dfrac{1/k}{1+\frac{a}{k}p+\frac{M}{k}p^2}$ $H_{mra}(p)=\dfrac{1/k}{1+2\xi\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$ avec $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ et $\xi=\dfrac{a}{2\sqrt{kM}}$
A.2.7	On obtient les réponses classiques d'un système du second ordre : • régime périodique avec dépassement si $\xi<1 (a<a_C)$, • régime apériodique critique si $\xi=1$ $(a=a_C)$, • régime apériodique sans dépassement si $\xi>1 (a>a_C)$. 
A.2.8	 Il y a 3 dépassements, le premier dépassement est de 25% par rapport à la valeur finale. D'après l'abaque des dépassements transitoires, $\xi=0,4$. Le temps de réponse à 5% est de 14,5 ms. Or pour $\xi=0,4$, $t_r\omega_0=7,5$. Soit $\omega_0=517,2$ rad/s soit $f_0=82,3$ Hz. Autre démarche : on peut retrouver les résultats en appliquant les relations connues du type : $D=\exp\left(-\dfrac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ et $t_{1max}=\dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$.

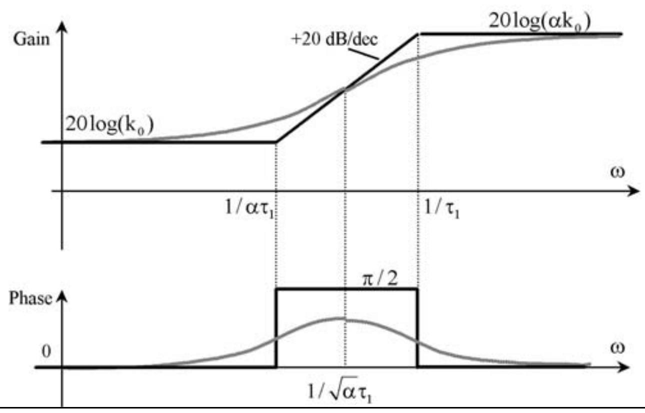
A.2.9	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ soit $k = \omega_0^2 M = 3{,}3\ \text{N}/\mu\text{m}$.
A.2.10	$F_{ext} = kx_\infty$ $F_{ext} = 3{,}3.10^6 \times 10.10^{-6} = 33\ \text{N}$ 

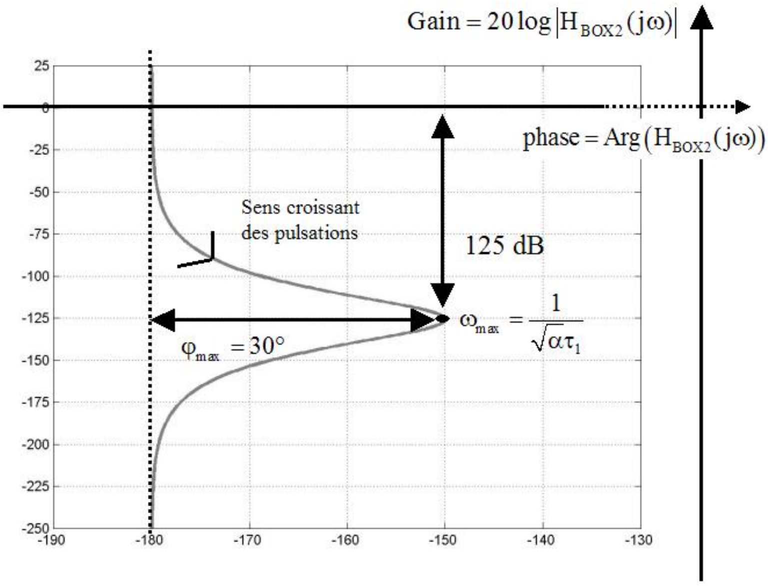
Modélisation par un système masse-ressort amorti avec contrôle intégral

A.2.11	$M\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_{ext} - kx - a\dfrac{dx}{dt} - b\int_{-\infty}^{t} x(u)du$ soit $K_{mrai}(p) = k + ap + \dfrac{b}{p} + Mp^2$
A.2.12	$x_\infty = \lim\limits_{p\to 0} pX(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{F_{ext}(p)}{K_{mrai}(p)} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{F_0/p}{K_{mrai}(p)} = F_0 \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{k+b/p} = 0$. Avantage de l'action intégrale : plus d'erreur statique.
A.2.13	La raideur minimale est de 123 dB soit $10^{123/20} = 1{,}41\ \text{N}/\mu\text{m}$. Cette raideur est bien supérieure à 1,3 N/μm.

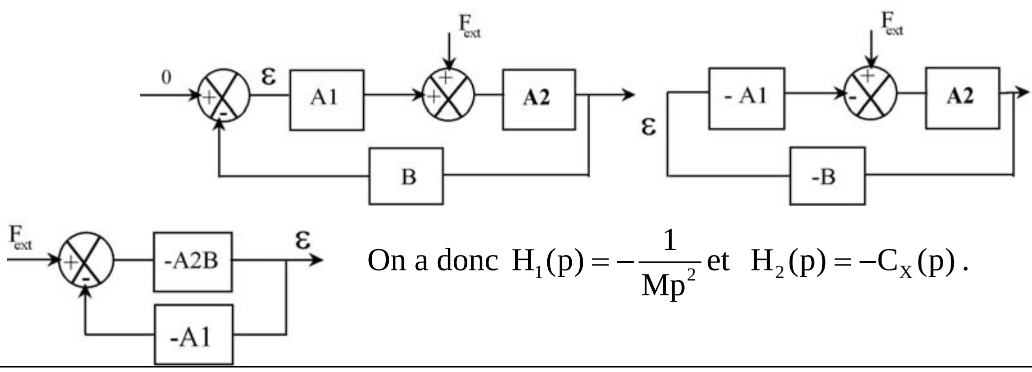
A.3 Suspension magnétique

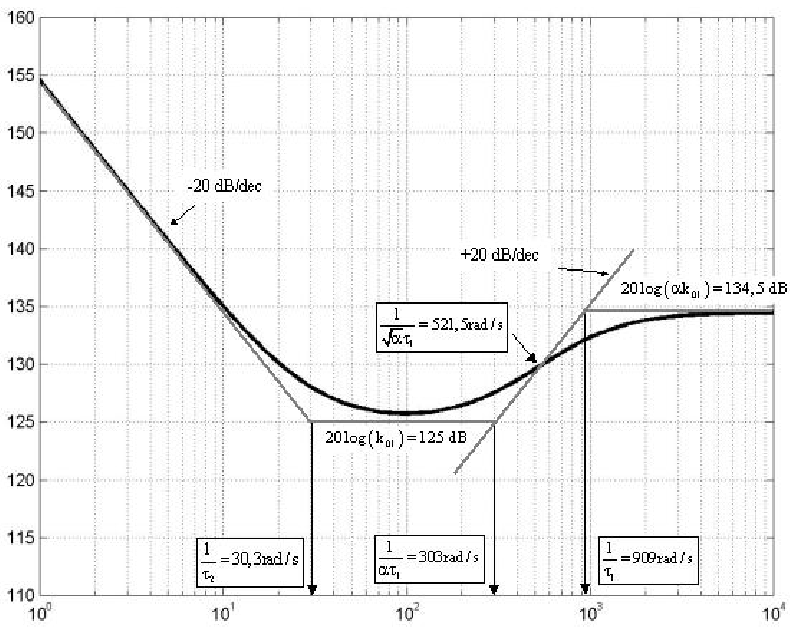
Système non perturbé

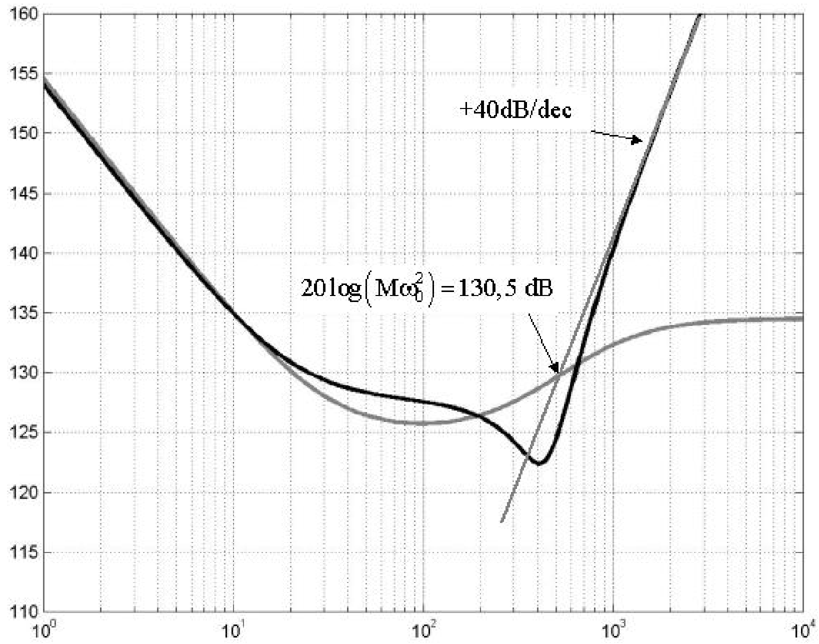
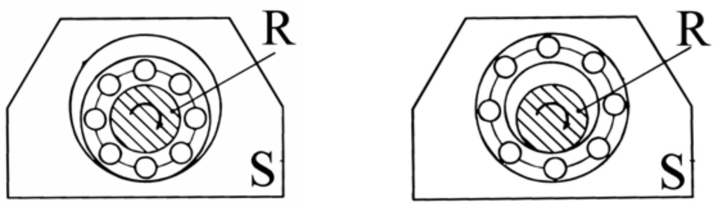
A.3.1	$H_{BOX_1}(p) = C_X(p)A(p)\dfrac{1}{Mp^2}D(p) = \dfrac{C_X(p)}{Mp^2}$
A.3.2	$H_{BOX_1}(p) = \dfrac{k_0}{Mp^2}$ La suspension se comporte comme un double intégrateur en boucle ouverte. Le système oscillera à la pulsation $\sqrt{\dfrac{k_0}{M}}$. Le système est donc instable.
A.3.3	Le correcteur doit apporter une avance de phase. Il faut donc que $\alpha > 1$. C'est un correcteur à avance de phase.
A.3.4	
A.3.5	Milieu géométrique des deux pulsations de coupure : $\omega_{max} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\tau_1}$.

A.3.6	$\varphi_{max} = \arctan(\alpha\tau_1\omega_{max}) - \arctan(\tau_1\omega_{max}) = \arctan(\sqrt{\alpha}) - \arctan(\frac{1}{\sqrt{\alpha}})$ ou $\sin\varphi_{max} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$. Pour avoir $\varphi_{max} = 30°$, il faut prendre $\alpha_0 = 3$.
A.3.7	$H_{BOX2}(p) = k_0 \frac{1+\alpha\tau_1 p}{1+\tau_1 p}\frac{1}{Mp^2}$
A.3.8	Le maximum de phase de H_{BOX2} est obtenue en $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau_1}$. On a donc $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau_1}$ soit $\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,2\pi f_0} = \frac{1}{\sqrt{3}.2\pi.83} = 1{,}1$ ms.
A.3.9	
A.3.10	Le maximum de marge de phase est obtenu pour $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau_1}$, on a donc $\Delta\varphi_{max} = \varphi_{max} = 30°$. Il faut remonter la courbe de 125dB soit $k_{01} = 10^{125/20} = 1{,}77.10^6$ N/m (cf courbe).
A.3.11	Il y a deux intégrateurs en boucle ouverte. L'erreur statique est donc nulle.

Influence des perturbations

A.3.12	 On a donc $H_1(p) = -\frac{1}{Mp^2}$ et $H_2(p) = -C_X(p)$.

A.3.13	$\dfrac{\varepsilon(p)}{F_{ext}(p)} = \dfrac{H_1(p)}{1+H_1(p)H_2(p)} = -\dfrac{1}{Mp^2 + C_X(p)}$
A.3.14	$\varepsilon_\infty = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{F_0}{P}\left(-\dfrac{1}{Mp^2 + k_0\dfrac{1+\alpha\tau_1 p}{1+\tau_1 p}}\right) = -\dfrac{F_0}{k_0}$ L’erreur statique est non nulle, le correcteur C_{X2} ne suffit donc pas.
A.3.15	Il est nécessaire d’introduire un correcteur proportionnel et intégral en amont de la perturbation. Soit $C_{X3}(p) = 1 + \dfrac{1}{\tau_2 p} = \dfrac{1+\tau_2 p}{\tau_2 p}$ Remarque : un correcteur intégrateur est impossible, le système serait instable.
A.3.16	Pour ne pas diminuer la marge de phase, le correcteur PI ne doit pas avoir d’influence sur l’avance de phase obtenue avec $C_{X2}(p)$. La pulsation de coupure du PI ($1/\tau_2$) doit donc être au moins une décade avant $1/\alpha\tau_1$. $\tau_2 = 10\alpha\tau_1$. Si $\tau_1 = 1{,}1$ ms et $\alpha = 3$, $\tau_2 = 33$ ms .
A.3.17	$H_{BOX3}(p) = k_{01}\dfrac{1+\alpha\tau_1}{1+\tau_1}\dfrac{1+\tau_2 p}{\tau_2 p}\dfrac{1}{Mp^2}$
A.3.18	$\dfrac{X(p)}{F_{ext}(p)} = \dfrac{1}{Mp^2 + C_X(p)}$. On a donc $K_f(p) = Mp^2 + C_X(p)$ et $K(p) = C_X(p)$.
A.3.19	$K(p) = k_{01}\dfrac{1+\alpha\tau_1 p}{1+\tau_1 p}\dfrac{1+\tau_2 p}{\tau_2 p}$ avec $\alpha_0 = 3$, $\tau_1 = 1{,}1$ ms , $k_{01} = 1{,}77.10^6$ et $\tau_2 = 33$ ms .
A.3.20	

A.3.21	M = 12, 34 kg. On trace donc 20log (Mp^2). 
A.3.22	On obtient exactement la même réponse en fréquence pour la raideur. Le PMA a donc les mêmes performances qu'un système masse ressort amorti avec contrôle intégral. Le correcteur $C_X(p)$ permet facilement de régler les différents paramètres.
A.3.23	Les roulements à billes assurent le maintien et le guidage de l'arbre à l'arrêt et en cas de dysfonctionnement de la suspension magnétique. Ils doivent avoir un jeu de fonctionnement supérieur aux déplacements possibles du rotor par rapport au stator. Généralement, ils limitent le déplacement maximal à la moitié de l'entrefer. Les roulements peuvent être montés sur le rotor ou sur le stator comme le montrent les figures ci-dessous. 

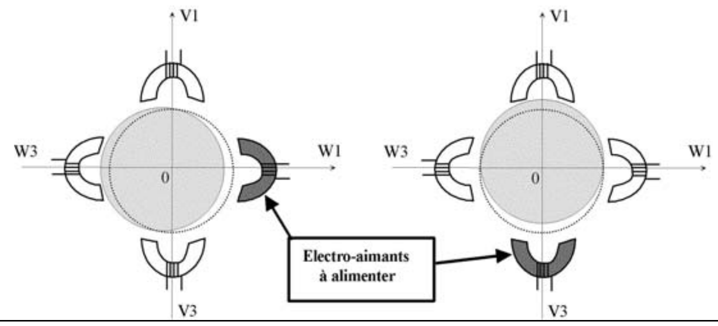
B. REALISATION D'UN PALIER MAGNETIQUE ACTIF

B.1. Electro-aimant

B.1.1	$F=\frac{B^2S}{2\mu_0}$ soit $F_{P\max}=\frac{1{,}5^2}{2\mu_0}=89{,}5\ \text{N/cm}^2$
B.1.2	On applique le théorème d'Ampère : $\oint \vec{H}d\vec{l}=Ni$ soit $\frac{B}{\mu_0}\left(2e+\frac{l_s}{\mu_{rs}}+\frac{l_r}{\mu_{rr}}\right)=Ni$ avec l_s et l_r les longueurs des lignes de flux dans le stator (l'électro-aimant) et le rotor, et μ_s et μ_r les perméabilités relatives des tôles magnétiques du stator et du rotor. D'après l'énoncé, μ_s et μ_r sont infinies. On a donc : $B=\frac{\mu_0 Ni}{2e}$. $F=\left(\frac{\mu_0 Ni}{2e}\right)^2\frac{S}{2\mu_0}=\frac{\mu_0 SN^2}{8}\left(\frac{i}{e}\right)^2$, on a donc $F=\lambda\left(\frac{i}{e}\right)^2$ avec $\lambda=\frac{\mu_0 SN^2}{8}$.
B.1.3	La force F fournie par l'électro-aimant est uniquement une force d'attraction. Pour contrôler un axe, il est nécessaire d'avoir n_1 = 2 électro-aimants situés de part et d'autre du rotor. Pour contrôler le plan, il en faudra donc n_2 = 4.
B.1.4	$dF=-\frac{2\lambda i_0^2}{e_0^3}de+\frac{2\lambda i_0}{e_0^2}di$ soit avec $F_0=\lambda\left(\frac{i_0}{e_0}\right)^2$, $dF=-2\frac{F_0}{e_0}de+2\frac{F_0}{i_0}di$. On a donc bien $dF=\gamma_1\ de+\gamma_2\ di$ avec $\gamma_1=-2\frac{F_0}{e_0}$ et $\gamma_2=2\frac{F_0}{i_0}$.
B.1.5	Le terme $\gamma_1=\frac{\partial F}{\partial e}=-2\frac{F_0}{e_0}$ est bien homogène à une raideur d'un point de vue mécanique (N/m) et γ_1 est négatif. Lorsque la raideur d'un palier est positive, le palier peut être comparé à un ressort car il s'oppose au déplacement. Il est stable. Par contre, lorsque la raideur est négative, le palier favorise l'écartement par rapport à sa position d'équilibre. Si e augmente, la force appliquée par l'électro-aimant diminue, le rotor s'écarte davantage. On parle alors d'instabilité en boucle ouverte.
B.1.6	$K_N=2\frac{F_0}{e_0}=2\frac{175}{450.10^{-6}}=0{,}777\ \text{N}/\mu\text{m}$
B.1.7	La raideur négative est de 117,8 dB. Cette raideur reste inférieure à la raideur minimale de la suspension qui est d'environ de 122,5 dB. La suspension reste donc stable. En réalité, cette raideur négative est intégrée dans l'asservissement.

B.2. Electronique de commande

<table>
<tr><td>B.2.1</td><td>



La force exercée est une force d'attraction $F = \lambda \left(\frac{i}{e}\right)^2$ dépendant du carré du courant.

Le sens du courant est donc indifférent.
</td></tr>
<tr><td>B.2.2</td><td>Cette commande, en classe B, présente un certain nombre d'inconvénients : utilisation de linéarisateurs permettant de réaliser un transfert linéaire entre la commande et la force résultante, mauvais comportement dynamique, force maximale réduite…</td></tr>
<tr><td>B.2.3</td><td>

$F = F_1 - F_3 = 0$, le rotor reste centré.

La sortie du correcteur est donc nulle $v = 0$. On a donc $i_1 = k_a u_{I1} = k_a v_0$.

Soit $v_0 = \frac{i_1}{k_a} = \frac{2}{0,4} = 5\ \text{V}$.
</td></tr>
<tr><td>B.2.4</td><td>

$$F = F_1 - F_3 = \lambda \left(\frac{i_1}{e_1}\right)^2 - \lambda \left(\frac{i_3}{e_3}\right)^2 = \lambda \left[\left(\frac{i_1}{e_0 - x}\right)^2 - \left(\frac{i_3}{e_0 + x}\right)^2 \right]$$
</td></tr>
<tr><td>B.2.5</td><td>

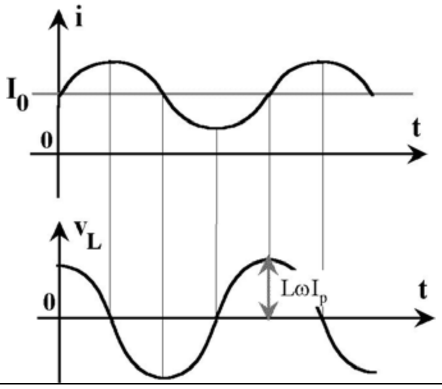
$$F = \lambda \left[\left(\frac{k_a (v + v_0)}{e_0 - x}\right)^2 - \left(\frac{k_a (v - v_0)}{e_0 + x}\right)^2 \right]$$

si $x << e_0$, on a $F \approx \lambda \left[\left(\frac{k_a (v + v_0)}{e_0}\right)^2 - \left(\frac{k_a (v - v_0)}{e_0}\right)^2 \right]$

soit $F \approx \frac{\lambda k_a^2}{e_0^2} \left[(v + v_0)^2 - (v - v_0)^2 \right]$ $\quad F \approx 4\lambda \left(\frac{k_a}{e_0}\right)^2 v_0 v$
</td></tr>
<tr><td>B.2.6</td><td>

Pour des déplacements tels que $x << e_0$, la force résultante suivant l'axe V est proportionnelle à v (signal de sortie du correcteur).

On a donc $A(p) = 4\lambda v_0 \left(\frac{k_a}{e_0}\right)^2$.
</td></tr>
<tr><td>B.2.7</td><td>

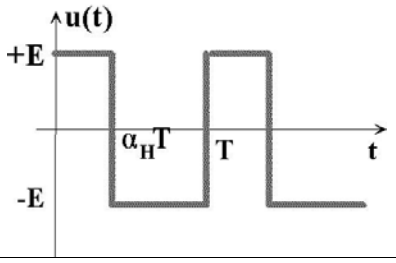
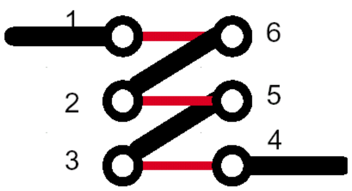


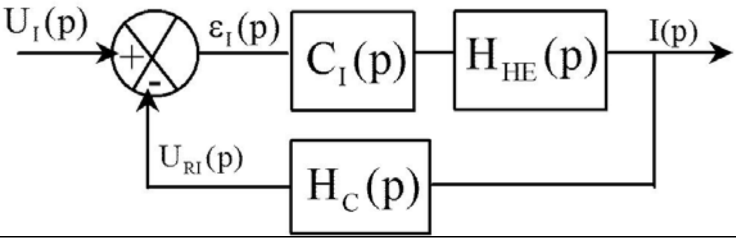
La tension maximale vaut $v_{L\max} = L\omega I_p$
</td></tr>
<tr><td>B.2.8</td><td>

$v_{L\max} = L\omega I_p$ avec $v_{L\max} = 150\ \text{V}$ et $I_p = 2\ \text{A}$
</td></tr>
</table>

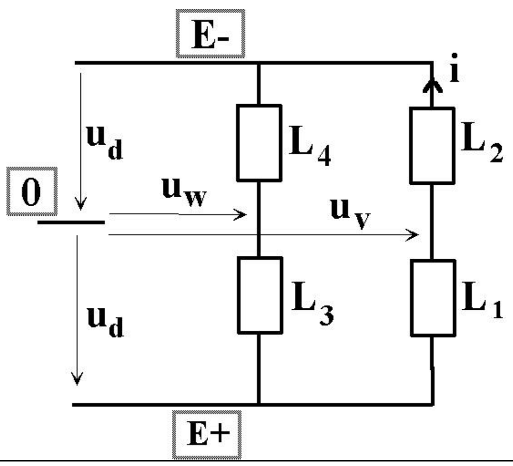
	On obtient $f_{max}=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{v_{L\,max}}{LI_p}$ soit $f_{max}=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{150}{43.10^{-3}\times 2}=277,5\ \text{Hz}$. Au delà de f_{max}, l'amplificateur de puissance saturera et on ne pourra plus moduler la force dans sa totalité.

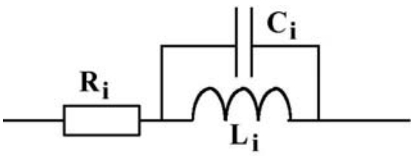
B.3. Amplificateur de courant

B.3.1	 $\langle u\rangle=(2\alpha_H-1)E$
B.3.2	$\langle u\rangle=(2\alpha_H-1)E=k_V u_c$ soit $\alpha_H=\dfrac{1}{2}+\dfrac{k_V u_c}{2E}$
B.3.3	$u=Ri+L\dfrac{di}{dt}$, soit $U(p)=(R+Lp)I(p)$. On a donc $H_E(p)=\dfrac{I(p)}{U(p)}=k_E\dfrac{1}{1+\tau_E p}$ avec $k_E=\dfrac{1}{R}$ et $\tau_E=\dfrac{L}{R}$.
B.3.4	R = 1,5 Ω et L = 43 mH, soit $k_E=0,66\ \Omega^{-1}$ et $\tau_E=28,66\ \text{ms}$.
B.3.5	τ_E dépend de L. Or l'inductance équivalente de l'électro-aimant dépend de la largeur de l'entrefer. τ_E est donc ici calculée pour un entrefer correspondant au rotor centré.
B.3.6	$f_E=\dfrac{1}{2\pi\tau_E}=5,55\ \text{Hz}$
B.3.7	La tension aux bornes de l'électro-aimant est décomposable en une composante continue $\langle u\rangle$ et une composante alternative à la fréquence de découpage. On a $f_e << f_{hacheur}$, la composante alternative sera donc filtrée. On suppose que la transformée de Laplace de u(t) est égale à la transformée de Laplace de $\langle u(t)\rangle$ (modèle moyen) : $$H_{HE}(p)=\dfrac{I(p)}{U_C(p)}=\dfrac{I(p)}{U(p)}\dfrac{U(p)}{U_C(p)}\approx H_E(p)k_V$$
B.3.8	La bande passante à –1dB de la sonde LAH 25-NP est de 200kHz. La fréquence de coupure de l'électro-aimant étant de 5,55 Hz. La fonction de transfert de la sonde est équivalente à un gain pur : $H_C(p)=k_C$.
B.3.9	Le courant maximal étant de 4A, les primaires sont mis en série et forment 3 spires (variante 3). Le rapport est de K_N = 3 :1000. 
B.3.10	La résistance de mesure fixe le gain de la sonde. On a $R_M=\dfrac{V_M}{I_P K_N}=\dfrac{k_C}{K_N}$, soit

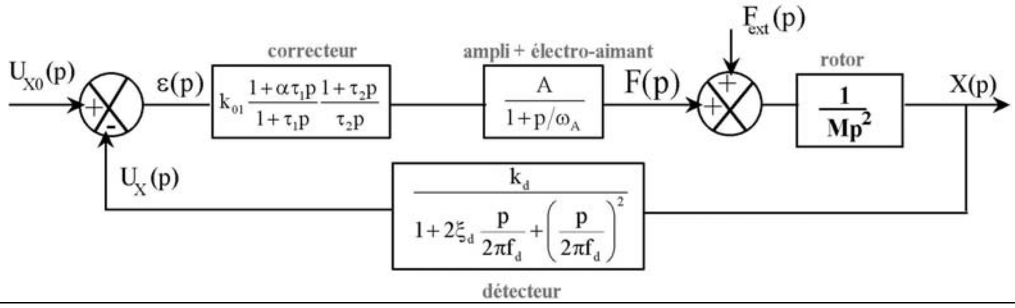
	$R_M = \dfrac{2,5}{3/1000} = 833,33\ \Omega$.
B.3.11	
B.3.12	$H_{BOI}(p) = C_I(p) H_{HE}(p) H_C(p)$ soit $H_{BOI}(p) = C_I(p) \dfrac{k_V k_E k_C}{1+\tau_E p}$
B.3.13	$\varepsilon_{I\infty} = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{U_I(p)}{1+H_{B0I}(p)} = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{U_{I0}}{1+H_{B0I}(p)} = \dfrac{U_{I0}}{1+k_I k_V k_E k_C}$ Il faudrait que $k_I \to \infty$. Ce qui est irréalisable.
B.3.14	Il faut ajouter une intégration dans la boucle ouverte, on utilise donc un correcteur proportionnel et intégral (PI). On aurait pu utiliser un intégrateur pur, mais il est préférable pour augmenter les performances d'utiliser un PI.
B.3.15	$C_I(p) = k_I \left(1 + \dfrac{1}{\tau_I p}\right) = k_I \dfrac{1+\tau_I p}{\tau_I p}$
B.3.16	$H_{BOI}(p) = \dfrac{k_I(1+\tau_I p)}{\tau_I p} \dfrac{k_V k_E k_C}{(1+\tau_E p)} = \dfrac{k_I k_V k_E k_C}{\tau_E p}$. La marge de phase de cette boucle de courant est donc de 90° et la marge de gain infinie.
B.3.17	$H_I(p) = \dfrac{\dfrac{k_I k_V k_E}{\tau_E p}}{1+\dfrac{k_I k_V k_E k_C}{\tau_E p}} = \dfrac{1}{k_C} \dfrac{1}{1+\dfrac{\tau_E}{k_I k_V k_E k_C} p}$ soit $H_I(p) = \dfrac{k_a}{1+\dfrac{p}{\omega_A}}$ La bande passante est donc $\omega_A = \dfrac{k_I k_V k_E k_C}{\tau_E}$.
B.3.18	$f_A = 1500$ Hz et $k_I = \dfrac{2\pi f_A \tau_E}{k_V k_E k_C} = \dfrac{2\pi f_A\, L/R}{k_V\, 1/R\, k_C} = \dfrac{2\pi f_A L}{k_V k_C}$ soit $k_I = \dfrac{2\pi \times 1500 \times 43.10^{-3}}{15 \times 2,5} = 10,8$
B.3.19	$A(p) = \dfrac{4\lambda v_0}{e_0} \dfrac{k_a}{1+\dfrac{p}{\omega_A}} = \dfrac{A}{1+\dfrac{p}{\omega_A}}$

B.4. Détecteur de position

<table>
<tr><td>B.4.1</td><td>Caractéristiques à prendre en compte lors du choix d'un capteur :
• la linéarité, la précision, la fidélité
• la plage de mesure,
• la bande passante, le temps de réponse,
• le rapport signal/bruit,
• la dérive thermique,
• les dimensions, la facilité de mise en œuvre, le prix…
et pour notre application
• la sensibilité au champ magnétique extérieur.</td></tr>
<tr><td>B.4.2</td><td>· <u>Les capteurs à effet Hall :</u> Ces capteurs, fixés au stator, fournissent une image du champ magnétique produit par un aimant fixé au rotor. L'induction mesurée au stator varie en fonction de la position axiale du rotor et fournit donc une image de l'entrefer. Ces capteurs sont faciles à mettre en œuvre et leur prix de revient est faible. Ils sont néanmoins à déconseiller à cause de leur grande sensibilité au champ magnétique extérieur (par principe).
· <u>Les capteurs optiques :</u> Ces capteurs émettent un rayon lumineux qui se réfléchit sur une cible. L'intensité du signal réfléchi est fournie par un phototransistor. Cette intensité dépendant de la distance entre la cible et le capteur, on obtient une image de la position. Ce capteur n'est pas sensible au champ magnétique, possède un rapport signal/bruit excellent, une bande passante importante, et est très simple à mettre en œuvre. Néanmoins, sa dérive thermique est très élevée car le gain du phototransistor dépend fortement de la température.
<u>· Les capteurs à réluctance variable :</u> Ils sont réalisés grâce à une inductance dont une partie du circuit magnétique est située au stator (avec le bobinage) tandis que l'autre partie est située au rotor. La valeur de l'inductance dépendant de l'entrefer, on obtient une image de la distance entre le rotor et le stator.
<u>· Les capteurs à courants induits :</u> Un bobinage statorique est alimenté par un courant haute fréquence. Tant qu'il est seul, ce bobinage peut être assimilé à une inductance. Par contre, lorsqu'on approche un conducteur, des courants sont induits à l'intérieur de ce dernier et modifient la fonction de transfert du capteur. Cette modification dépendant de la distance entre le bobinage et le conducteur, on obtient une image de l'entrefer.
Les capteurs potentiométriques, capacitifs, etc</td></tr>
<tr><td>B.4.3</td><td>$L = \frac{N'^2}{\Re}$ où $\Re$ est la réluctance équivalente du circuit magnétique du capteur. La perméabilité du détecteur et du rotor étant infinie, on a $\Re = \frac{1}{\mu_0}\frac{2e}{S_d}$. Soit $L = \frac{\mu_0 S_d N'^2}{2e}$.</td></tr>
<tr><td>B.4.4</td><td>
</td></tr>
</table>

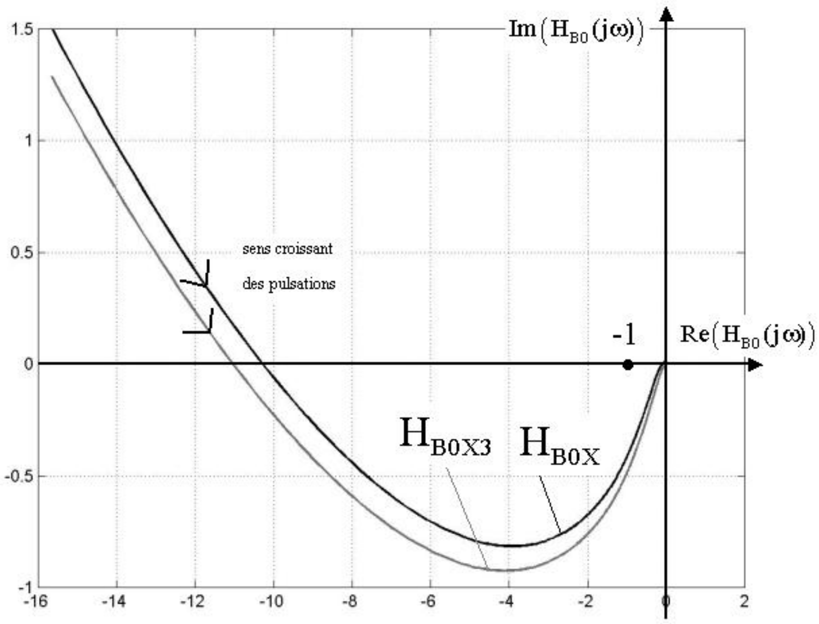
B.4.5	Si le rotor est centré, $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$. On a donc $u_V = u_W = 0\ \text{V}$.
B.4.6	$2U_d(p) = (L_1 + L_2)pI(p)$ or $I(p) = \dfrac{U_d(p) - U_V(p)}{L_1 p}$ $2U_d(p) = \dfrac{L_1 + L_2}{L_1}\left(U_d(p) - U_V(p)\right)$ soit $\dfrac{U_V(p)}{U_d(p)} = \dfrac{L_2 - L_1}{L_1 + L_2}$
B.4.7	$L_i = \dfrac{\mu_0 S_d N'^2}{2e_i}$ soit $\dfrac{1}{L_i} = k_L e_i$ avec $e_1 = e_0 + x$ et $e_2 = e_0 - x$ $\dfrac{U_V(p)}{U_d(p)} = \dfrac{L_2 - L_1}{L_1 + L_2} = \dfrac{1/L_1 - 1/L_2}{1/L_1 + 1/L_2} = \dfrac{(e_0 + x) - (e_0 - x)}{(e_0 + x) + (e_0 - x)}$ soit $\dfrac{U_V(p)}{U_d(p)} = \dfrac{x}{e_0}$ on a donc $k_x = \dfrac{1}{e_0}$.
B.4.8	Les capacités parasites sont localisées d'une part entre chaque spire du bobinage et toutes les autres spires, d'autre part entre ces spires et le noyau, et enfin entre ces spires et le câble de connexion du capteur. L'ensemble de ces capacités peut être regroupé sous forme d'une capacité globale C_i, située en parallèle avec l'inductance. Les résistances parasites représentent les sources de dissipation énergétique du circuit : pertes ohmiques dans le bobinage, pertes par courants de Foucault dans le noyau, pertes magnétiques dans le noyau par traînage et par hystérésis. L'ensemble de ces pertes est représenté par une résistance globale R, en série avec l'inductance.
B.4.9	
B.4.10	Les variations d'impédance $\Delta Z_i = \Delta R_i + j\omega \Delta L_i$ font intervenir pour la partie résistive, les pertes ohmiques dans le bobinage, indépendantes de la position du rotor et les pertes magnétiques R_{mi} proportionnelles à l'inductance. On a donc : $\Delta R_{mi} = k_m \omega \Delta L_i$.
B.4.11	Vus les résultats précédents, la variation globale d'impédance est alors bien proportionnelle à la variation d'inductance ΔL_i : $\Delta Z_i = (k_m + j\omega)\Delta L_i$. On retombe donc sur les résultats de la question B.4.7.
B.4.12	$u'(t) = k_x x \left(u_d(t)\right)^2 = k_x x U_d^2 \left(1 - \cos(2\omega t)\right)$ avec U_d la valeur efficace de u_d. La composante alternative à 40kHz est filtrée par le filtre passe-bas, on a donc : $u_x(t) = \left\langle k_x x \left(u_d(t)\right)^2 \right\rangle = \left(k_x U_d^2\right) x$ La tension de sortie est bien proportionnelle au déplacement relatif x.
B.4.13	$D_{réel}(p) = \dfrac{k_d}{1 + 2\xi_d \dfrac{p}{2\pi f_d} + \left(\dfrac{p}{2\pi f_d}\right)^2}$
B.4.14	$k_d = 45\ \text{mV}/\mu\text{m} = 45.10^3\ \text{V/m}$

B.5 Synthèse

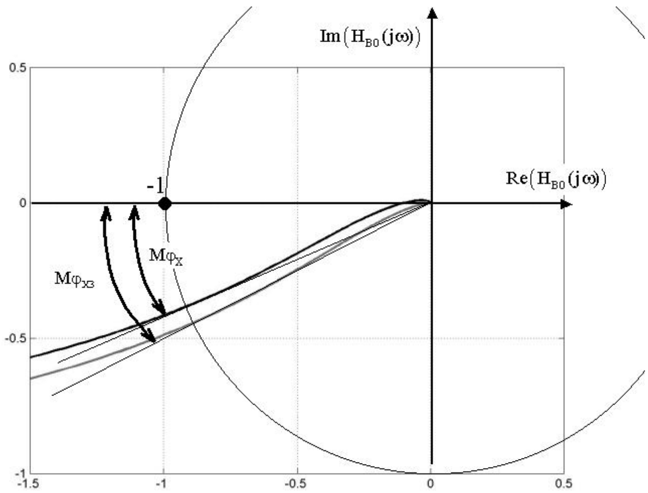
<table>
<tr>
<td>B.5.1</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>B.5.2</td>
<td>

$$H_{BOX}(p) = k_0\left(\frac{1+\alpha\tau_1 p}{1+\tau_1 p}\right)\left(\frac{1+\tau_2 p}{\tau_2 p}\right)\left(\frac{A}{1+\frac{p}{\omega_A}}\right)\left(\frac{1}{Mp^2}\right)\left(\frac{k_d}{1+2\xi_d\frac{p}{2\pi f_d}+\left(\frac{p}{2\pi f_d}\right)^2}\right)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>B.5.3</td>
<td>


L’amplificateur et le détecteur introduisent un déphasage en hautes fréquences (de -90° pour l’ampli et de –180° pour le détecteur) et atténuent le gain en boucle ouverte. Le diagramme de Nyquist pour les HF permettent facilement d’identifier les 2 courbes. H_{BOX3} tend en effet vers –180° pour des fréquences infinies.
</td>
</tr>
<tr>
<td>B.5.4</td>
<td>Les deux suspensions sont stables. En parcourant le lieu de Nyquist dans le sens croissant des pulsations, on laisse à gauche le point –1.</td>
</tr>
</table>

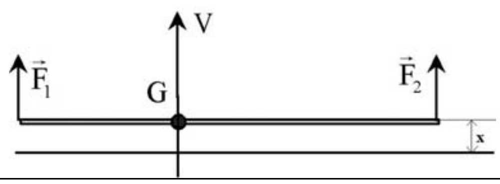
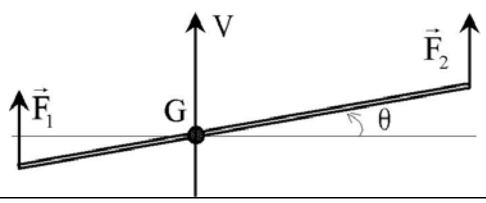
B.5.5	 On obtient pour H_{BOX} une marge de phase de $M\varphi_X = 22,7°$ et pour H_{B0X3} une marge de phase de $M\varphi_{X3} = 26,4°$. La marge de phase de H_{BOX3} est légèrement inférieure au 30° prévue, le correcteur PI a légèrement abaissée la phase en f_0. Le système réel est encore stable avec une marge de phase suffisante pour l'application.

C. COMMANDE EN TRANSLATION BASCULEMENT

C.1 Principe de la commande

C.1.1	$L_{P1} = 99{,}9\text{ mm} \quad L_{P2} = 247{,}1\text{ mm}$ $L_{D1} = 123{,}19\text{ mm} \quad L_{D2} = 270{,}21\text{ mm}$
C.1.2	$d_1 = x - \tan\theta.L_{D1}$ et $d_2 = x + \tan\theta.L_{D2}$
C.1.3	Entrefer palier radial : 0,45 mm soit débattement max 90µm $\tan(\theta_{max}) = \frac{x_{max}}{L_{D1}} = \frac{90.10^{-6}}{123{,}19.10^{-3}} = 730{,}5787807.10^{-6}$ soit $\tan^{-1}\left(730{,}5787807.10^{-6}\right) = 730{,}5786507.10^{-6}$ d'où $\tan(\theta) \approx \theta$ justifié. On a donc $\begin{cases} d_1 = x - \theta L_{D1} \\ d_2 = x + \theta L_{D2} \end{cases}$
C.1.4	$\begin{cases} d_T = \beta d_1 + d_2 = x(\beta+1) + \theta(L_{D2} - \beta L_{D1}) \\ d_B = d_1 - d_2 = -\theta(L_{D1} + L_{D2}) \end{cases}$
C.1.5	Si $\beta = \frac{L_{D2}}{L_{D1}}$ alors $\begin{cases} d_T = x(\beta+1) \\ d_B = -\theta(L_{D1} + L_{D2}) \end{cases}$ d_T et d_B sont proportionnelles à x et θ.
C.1.6	• Lors d'une translation x dans le sens positif du plan V, d_T étant positif, les paliers V13 et V24 sont activés positivement. Le rotor "redescend". • Lors d'un basculement d'angle θ positif, d_B est négatif. Le PMA suivant l'axe V13 est activité positivement, par contre le PMA suivant l'axe V24 est activé négativement. Le rotor pivote dans le sens inverse au basculement θ.

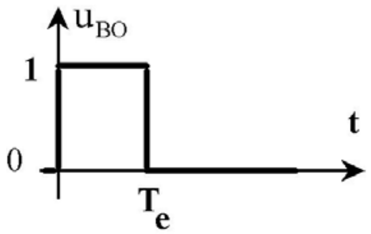
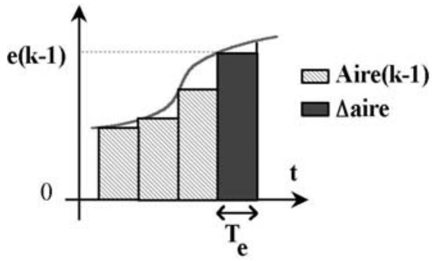
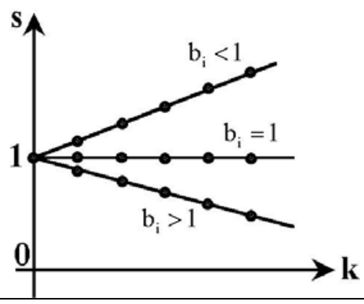
C.2 Modèle d'état

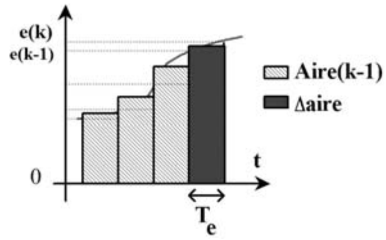
C.2.1	 En appliquant la relation fondamentale de la dynamique suivant l'axe de translation V : $M'\ddot{x} = F_1 + F_2$
C.2.2	 En appliquant la relation fondamentale de la dynamique suivant l'axe de basculement : $J\ddot{\theta} = -F_1 L_{P1} + F_2 L_{P2}$
C.2.3	D'après les questions précédentes, on a : $\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F_1}{M'} + \frac{F_2}{M'} \\ \ddot{\theta} = -F_1 \frac{L_{P1}}{J} + F_2 \frac{L_{P2}}{J} \end{cases}$ et $\begin{cases} d_1 = x - \theta L_{D1} \\ d_2 = x + \theta L_{D2} \end{cases}$

	On a donc $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\theta}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \theta\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1/M'&1/M'\\0&0\\-L_{P1}/J&-L_{P2}/J\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix}$ Et $\begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-L_{D1}&0\\1&0&L_{D2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \theta\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix}$ En identifiant à la forme proposée, on obtient : $b_1=1/M'$, $b_2=-L_{P1}/J$, $b_3=L_{P2}/J$, $c_1=-L_{D1}$ et $c_2=L_{D2}$.
C.2.4	Un système est dit à état entièrement commandable, si par action sur l'entrée, on peut atteindre en temps fini n'importe quel point de l'espace d'état.
C.2.5	Le système est d'ordre 4, il faut calculer la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$ et vérifier que le rang de cette matrice est identique à l'ordre du système. $\mathcal{C}=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & A^3B\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}b_1&b_1\\0&0\\b_2&b_3\\0&0\end{bmatrix}$ et $A^2B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$ On obtient donc $\mathcal{C}=\begin{bmatrix}0&0&b_1&b_1&0&0&0&0\\b_1&b_1&0&0&0&0&0&0\\0&0&b_2&b_3&0&0&0&0\\b_2&b_3&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ Le rang de $\mathcal{C}$ est de 4. Le système est bien commandable.
C.2.6	Un système est dit, à état entièrement observable, si par observations des entrées et sorties sur un intervalle de temps fini, on peut déterminer l'état initial du système.
C.2.7	Le système est d'ordre 4, il faut calculer la matrice d'observabilité $\mathcal{O}$ et vérifier que le rang de cette matrice est identique à l'ordre du système. $\mathcal{O}=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\\CA^3\end{bmatrix}$ Or, $CA=\begin{bmatrix}0&1&0&c_1\\0&1&0&c_2\end{bmatrix}$ et $CA^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

	On obtient donc $\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}1 & 0 & c_1 & 0\\ 1 & 0 & c_2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & c_1\\ 0 & 1 & 0 & c_2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ La rang de $\boldsymbol{O}$ est de 4. Le système est bien observable.
C.2.8	$\left[K\right]$ est une matrice 2 lignes et 4 colonnes. On notera $\left[K\right]=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24}\end{bmatrix}$.
C.2.9	On obtient la matrice d'évolution : $\left[A_{BF}\right]=\left[A\right]+\left[B\right]\left[K\right]$
C.2.10	Toutes les valeurs propres de $\left[A_{BF}\right]$ doivent être à partie réelle strictement négative.
C.2.11	On doit avoir : $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -a_0 & -a_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -a'_0 & -a'_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ b_1\left(K_{11}+K_{21}\right) & b_1\left(K_{12}+K_{22}\right) & b_1\left(K_{13}+K_{23}\right) & b_1\left(K_{14}+K_{24}\right)\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ b_2K_{11}+b_3K_{21} & b_2K_{12}+b_3K_{22} & b_2K_{13}+b_3K_{23} & b_2K_{14}+b_3K_{24}\end{bmatrix}$ En identifiant terme à terme, on trouve les différents termes du correcteur. Par exemple K_{11} et K_{21} vérifient : $\begin{cases}b_1\left(K_{11}+K_{21}\right)=-a_0\\ b_2K_{11}+b_3K_{21}=0\end{cases}$ soit $\begin{cases}K_{11}=-\dfrac{a_0b_2}{b_1b_2-b_1b_3}\\ K_{21}=\dfrac{a_0b_3}{b_1b_2-b_1b_3}\end{cases}$. On procède de la même façon pour les 6 autres coefficients.

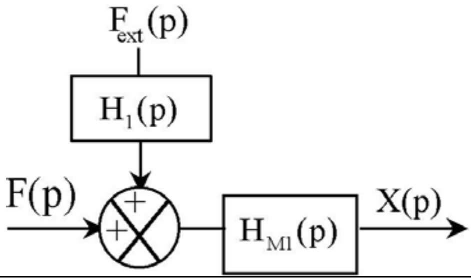
C.3 Correction numérique

C.3.1	Lors de l'échantillonnage, le spectre du signal à échantillonner est dupliqué autour des multiples de F_e. Si on veut éviter un repliement de spectre, il est nécessaire de limiter la fréquence maximale des signaux à échantillonner. Le filtre anti-repliement est en fait le filtre passe-bas utilisé pour la détection synchrone des détecteurs de position.
C.3.2	 $u_{BO}(t) = u(t) - u(t - T_e)$ Soit $B_O(p) = \frac{1 - e^{-T_ep}}{p}$
C.3.3	Par définition, $z = e^{T_ep}$
C.3.4	$C_i(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-T_ep}}{p}\frac{1}{T_ip}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{T_ip^2}\right\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)\frac{T_ez}{T_i\left(z-1\right)^2} = \frac{T_e}{T_i}\frac{1}{z-1}$ $C_i(z) = \frac{1}{K}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{K}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$
C.3.5	$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{K}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$ soit $s(k) = s(k-1) + \frac{1}{K}e(k-1)$  $s(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t')dt' = \frac{1}{T_i}\text{Aire}(k) = \frac{1}{T_i}$ $s(k) = \frac{1}{T_i}\text{Aire}(k) = \frac{\text{Aire}(k-1) + \Delta\text{aire}}{T_i}$ $s(k) = s(k-1) + \frac{T_e}{T_i}e(k-1)$ Ceci correspond donc bien au calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles.
C.3.6	$C_{i0}(z) = \frac{z - b_i}{z-1} = \frac{z-1+1-b_i}{z-1} = 1 + \frac{1-b_i}{z-1}$ On retrouve les résultats précédents avec $K' = \frac{1}{1-b_i}$.
C.3.7	 Pour avoir un correcteur PI, il faut donc $b_i < 1$.

C.3.8	$\frac{1}{p}=\frac{T_e}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ soit $s(k)=s(k-1)+T_e\frac{e(k)+e(k-1)}{2}$ Il s'agit encore d'une approximation par la méthode des rectangles (cf. schéma). 
C.3.9	$C_{pi}(z)=k_I\left(1+\frac{T_e}{2T_i}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)=k_I\frac{1+\frac{T_e}{2T_i}+\left(\frac{T_e}{2T_i}-1\right)z^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{c_{i0}+c_{i1}z^{-1}}{1-z^{-1}}$ Soit $c_{i0}=k_I\left(\frac{T_e}{2T_i}+1\right)$ et $c_{i1}=k_I\left(\frac{T_e}{2T_i}-1\right)$
C.3.10	$c_{i0}=10,8125$ et $c_{i1}=-10,7874$
C.3.11	Valeur maximale : 01111,1111111111 (3FFF) soit 15,159990234375, Valeur minimale : 10000,0000000000 (4000) soit –16.
C.3.12	c_{i0} = 01010,1100111111 soit 2B3F, c_{i1} = 10101,0011011010 soit 54DA.
C.3.13	On risque de modifier les performances du correcteur. Il s'agit en fait d'un correcteur qui approxime celui calculé en continu. Cette approximation s'ajoute à celle introduite lors de l'approximation de la dérivée.

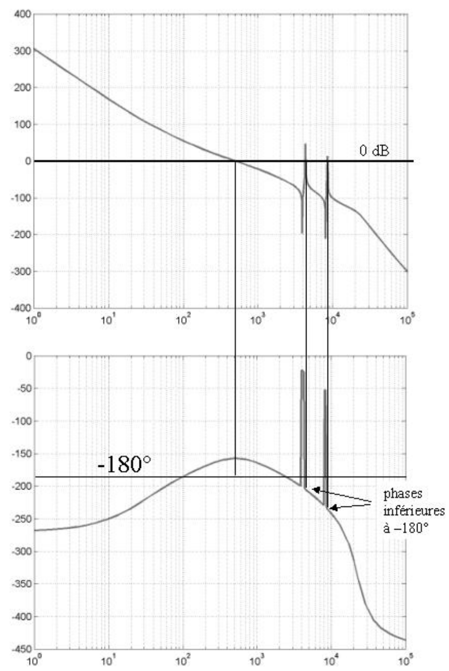
D. INFLUENCES DES MODES FLEXIBLES
ET EFFETS GYROSCOPIQUES

D.1. Modélisation

D.1.1	$(1-\gamma)M\frac{d^2y}{dt^2}=F_{ext}-k'(y-x)$
D.1.2	$\gamma M\frac{d^2x}{dt^2}=F+k'(y-x)$
D.1.3	$\begin{cases}(1-\gamma)Mp^2Y(p)=F_{ext}(p)-k'(Y(p)-X(p))\\ \gamma Mp^2X(p)=F(p)+k'(Y(p)-X(p))\end{cases}$ soit $\begin{cases}((1-\gamma)Mp^2+k')Y(p)=F_{ext}(p)+k'X(p)\\ (\gamma Mp^2+k')X(p)=F(p)+k'Y(p)\end{cases}$ On a donc $(\gamma Mp^2+k')X(p)=F(p)+k'\left(\frac{F_{ext}(p)+k'X(p)}{(1-\gamma)Mp^2+k'}\right)$ $\left(\frac{\gamma(1-\gamma)M^2p^4+\gamma k'Mp^2+(1-\gamma)k'Mp^2+k'^2-k'^2}{(1-\gamma)Mp^2+k'}\right)X(p)=F(p)+\frac{k'}{(1-\gamma)Mp^2+k'}F_{ext}(p)$ $\left(\frac{\gamma(1-\gamma)M^2p^4+k'Mp^2}{(1-\gamma)Mp^2+k'}\right)X(p)=F(p)+\frac{k'}{(1-\gamma)Mp^2+k'}F_{ext}(p)$ $\left(\frac{Mp^2\left(1+\gamma(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2\right)}{1+(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2}\right)X(p)=F(p)+\frac{F_{ext}(p)}{1+(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2}$ En identifiant, on obtient :  $H_1(p)=\frac{1}{1+(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2}$ $H_{M1}(p)=\frac{1+(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2}{Mp^2\left(1+\gamma(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2\right)}$
D.1.4	$H_{M1}(p)=\frac{1+(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2}{Mp^2\left(1+\gamma(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2\right)}=\frac{1+(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2+\gamma(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2-\gamma(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2}{Mp^2\left(1+\gamma(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2\right)}$ $H_{M1}(p)=\frac{1}{Mp^2}+\frac{(1-\gamma)^2\frac{M}{k'}p^2}{Mp^2\left(1+\gamma(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2\right)}=\frac{1}{Mp^2}+\frac{\frac{(1-\gamma)^2}{k'}}{1+\gamma(1-\gamma)\frac{M}{k'}p^2}$ On a donc bien :

	$H_{M1}(p)=\dfrac{1}{Mp^2}+\dfrac{k_{M1}}{1+\left(\dfrac{p}{\omega_{M1}}\right)^2}$ avec $k_{M1}=\dfrac{(1-\gamma)^2}{k'}$ et $\omega_{M1}=\sqrt{\dfrac{k'}{\gamma(1-\gamma)M}}$
D.1.5	$k_{M1}=\dfrac{0,01591}{1,84.10^7}=864,67.10^{-12}$ m/N et $\omega_{M1}=\sqrt{1,84.10^7}=4289,52$ rad/s soit $f_{M1}=682,67$ Hz
D.1.6	$k_{M1}\omega_{M1}^2=\dfrac{1-\gamma}{\gamma M}$ soit $\lambda=\dfrac{1}{1+k_{M1}\omega_{M1}^2 M}$ $k'=\dfrac{(1-\gamma)^2}{k_{M1}}=\dfrac{1}{k_{M1}}\left(\dfrac{k_{M1}\omega_{M1}^2 M}{1+k_{M1}\omega_{M1}^2 M}\right)^2$ avec M = 12,32 kg, on obtient : $\gamma=0,836$ (soit $\gamma M=10,3$ kg et $(1-\gamma)M=2,02$ kg) $k'=31.10^7$ N/m

D.2. Conséquences sur la stabilité

D.2.1	$H_{BOX}(p)=k_0\left(\dfrac{1+\alpha\tau_1 p}{1+\tau_1 p}\right)\left(\dfrac{1+\tau_2 p}{\tau_2 p}\right)\left(\dfrac{A}{1+\dfrac{p}{\omega_A}}\right)\left(\dfrac{k_d}{1+2\xi_d\dfrac{p}{2\pi f_d}+\left(\dfrac{p}{2\pi f_d}\right)^2}\right)\left(\dfrac{1}{Mp^2}+\sum_{i=1,2}\dfrac{k_{Mi}}{1+\left(\dfrac{p}{\omega_{Mi}}\right)^2}\right)$
D.2.2	La suspension est instable car pour les deux fréquences associées aux modes 1 et 2, le gain est nul et le déphasage inférieur à –180°. 

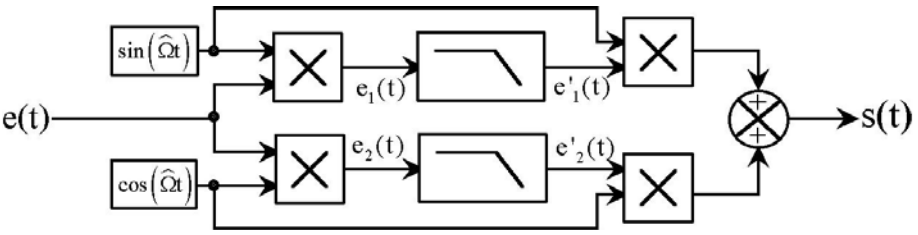
D.2.3	Pour rendre l'amortissement stable, il faudrait : • soit amortir le système en considérant que la raideur entre les deux masses possède un coefficient d'amortissement ; si cet amortissement ne suffit pas, il faut créer un trou de gain au niveau de ω_{M1} et ω_{M2}. Ceci est possible en ajoutant un filtre double T au correcteur. Le problème de cette solution est qu'elle fait également diminuer la phase autour de la pulsation propre ω_0. • soit filtrer beaucoup plus vite après la première fréquence propre ou au contraire allonger le plus possible la bande de phase pour englober les différentes pulsations propres. Ces différentes méthodes sont difficiles à mettre en place et ne sont pas satisfaisantes. Les réglages sont peu précis car les valeurs des fréquences propres, lorsque le rotor tourne, sont modifiées par les effets gyroscopiques. Pour passer ces vitesses critiques, on utilise un contrôle anti-balourd qui revient à créer un trou de gain à la vitesse de rotation or $\Omega = \omega$. Les différents modes ne sont donc plus excités.

D.3. Effets gyroscopiques

D.3.1	A l'arrêt, les modes excités sont ω_T , ω_B, ω_{M1} et ω_{M2} avec $\omega_T = \left(\omega_B\right)_{\Omega=0} = \omega_0$. Pour notre application, $f_T = \left(f_B\right)_{\Omega=0} = f_0 = 83\ \text{Hz}$, $f_{M1} = 682,7\ \text{Hz}$ et $f_{M2} = \sqrt{7,135.10^7} \big/ 2\pi = 1344,3\ \text{Hz}$.
D.3.2	Durant une montée en vitesse, les modes de résonance correspondant aux différents modes propres du rotor sont croisés et peuvent être potentiellement excités (diagramme de Campbell). Les points A, B, C et D, qui correspondent à des modes directs, peuvent être excités par le balourd (car tournant dans le même sens de rotation). Les points B', C' et D' ne sont pas excités par le balourd, mais peuvent l'être par des perturbations rétrogrades (effet de gaz autour des roues ou contact rotor stator par exemple). En général, pour les turbomachines, on ne se contente pas d'examiner les excitations liées au fondamental de la vitesse mais aussi à des multiples de cette valeur (nombre de pales des roues...).
D.3.3	La fréquence de précession du 1er mode est de 580 Hz, soit une vitesse de 34 800 tr/min. La vitesse maximale du turbocompresseur étant de 28 500 tr/min. Le turbocompresseur étudié est bien une machine sub-critique.

D.4. Contrôle anti-vibratoire

D.4.1	Il suffit d'injecter un signal $s(t) = \hat{b}\sin\left(\hat{\Omega}t + \hat{\phi}\right)$ où $\hat{b}$, $\hat{\Omega}$ et $\hat{\phi}$ sont les estimés de b, Ω et ϕ. En effet, si le balourd est parfaitement connu, on a alors un minimum de variation de commande donc un minimum de vibrations.
D.4.2	$e(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \sin\left(\omega_i t + \phi_i\right)$

	 $e_1(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \right) \sin(\hat{\Omega} t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \left(\cos\left((\omega_i - \hat{\Omega}) t + \phi_i \right) - \cos\left((\omega_i + \hat{\Omega}) t + \phi_i \right) \right)$ $e_1(t) = \frac{1}{2} A_\Omega \cos(\phi_\Omega) + \frac{1}{2} \sum_{i \in I / \omega_i \neq \hat{\Omega}} A_i \cos\left((\omega_i - \hat{\Omega}) t + \phi_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \cos\left((\omega_i + \hat{\Omega}) t + \phi_i \right)$ Après filtrage passe-bas, on ne conserve que la composante continue de $e_1(t)$ soit : $e'_1(t) = \frac{1}{2} g A_\Omega \cos(\phi_\Omega)$ De même, on montre que : $e'_2(t) = \frac{1}{2} g A_\Omega \sin(\phi_\Omega)$. Soit en sortie du détecteur synchrone, $s(t) = \frac{1}{2} g A_\Omega \left(\cos(\phi_\Omega) \sin(\hat{\Omega} t) + \sin(\phi_\Omega) \cos(\hat{\Omega} t) \right)$ $s(t) = \frac{1}{2} g A_\Omega \sin(\hat{\Omega} t + \phi_\Omega)$
D.4.3	On a $s(t) = \frac{1}{2} g A_\Omega \sin(\hat{\Omega} t + \phi_\Omega)$, si on choisit un gain g de 2 pour les filtres, on retrouve en sortie exactement la partie synchrone du signal d'entrée.
D.4.4	Les courbes représentent la réponse du système à un balourd quasi-sinusoïdal dont la fréquence augmente progressivement avec la montée en vitesse. On voit que l'amplitude des différentes courbes passe par un maximum lors du franchissement du mode rigide. Dès que le contrôle automatique du balourd (ABS) est enclenché, l'enveloppe de la position reste à une valeur constante. Le rotor tourne autour de son axe d'inertie naturel, en ne consommant presque plus d'énergie (courbes 2 et 3).