AGREGATION

SESSION 2003

CONCOURS INTERNE

Section : GENIE ELECTRIQUE

Option A : ELECTRONIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

ÉTUDE D'UN PROBLEME D'AUTOMATISATION

DUREE : **6** HEURES, COEFFICIENT : **1**

Aucun document n'est autorisé.

Calculatrice autorisée (conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999)
Convertisseur en Euro autorisé

MICROSCOPE A FORCE ATOMIQUE

Ce sujet comporte 3 dossiers distincts :

- Dossier de présentation, texte du sujet avec le travail demandé (15 pages)
- Documents annexes 1 à 3 (3 pages)
- Documents réponses 1, 2 et 3 (3 pages)

Ce sujet comporte quatre parties indépendantes :

Partie **1** : Modélisation du micro levier,
Partie **2** : Oscillations entretenues du micro levier,
Partie **3** : Traitement du signal issu du capteur à photo diodes,
Partie **4** : Exploitation pédagogique.

! Ces quatre parties sont à traiter obligatoirement mais le candidat traitera au choix la partie I.A (choix N° 1) **OU** les parties I.B **ET** I.C (choix N° 2)

Une lecture préalable et complète du sujet est indispensable.

Les candidats sont invités à numéroter chaque page de leur copie et à indiquer clairement le numéro de la question traitée.

Les candidats sont priés de rédiger les différentes parties du problème sur feuilles séparées et clairement repérées. Chaque question est identifiée par une police *italique* et repérées par un numéro.

Il leur est rappelé qu'ils doivent utiliser les notations propres au sujet, présenter clairement les calculs et dégager ou encadrer tous les résultats.

Tout résultat incorrectement exprimé ne sera pas pris en compte. En outre les correcteurs leur sauront gré d'écrire lisiblement et de soigner la qualité de leur copie.

Il sera tenu compote de la qualité de rédaction, en particulier pour les réponses aux questions ne nécessitant pas de calcul. Le correcteur attend des phrases complètes respectant la syntaxe de la langue française.

Pour la présentation des applications numériques, il est rappelé que lors du passage d'une forme littérale à son application numérique, il est recommandé aux candidats de procéder comme suit :

- après avoir rappelé la relation littérale, chaque grandeur est remplacée par sa valeur numérique en respectant la position qu'elle avait dans la relation puis le résultat numérique est donné sans calculs intermédiaires et sans omettre son unité.

Si le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement dans votre copie.

Microscope à force atomique

Inventé en 1985 par **G. Binnig et H. Rohrer** (prix Nobel de physique en 1986) dans le sillage du microscope à effet tunnel, le microscope à force atomique (AFM) a connu un essor fulgurant et s'est imposé comme un outil incontournable de caractérisation des surfaces. Cette technique permet d'obtenir des images tridimensionnelles à l'échelle nanométrique indépendamment de la nature des échantillons (biologiques, organiques, minérales).

La résolution exceptionnelle qu'il procure, sa simplicité de mise en oeuvre, la possibilité d'explorer des objets très variés allant de faces cristallines reconstruites à des circuits intégrés en passant par des molécules complexes comme l'ADN, sont à l'origine de ce succès dans l'histoire de l'instrumentation et expliquent qu'à l'heure actuelle, plusieurs milliers d'appareils soient installés non seulement dans les laboratoires de recherche, mais également en milieu industriel.

Gerd BINNIG (Prix Nobel de physique en 1986) : « Dans le vrai sens du terme, nous pouvons maintenant toucher des atomes. Il y a 50 ans c'était un rêve absolu ; Même pas un rêve, on n'imaginait pas qu'une telle chose soit possible. Et ce contact direct avec l'atome a aussi changé notre manière de penser ».

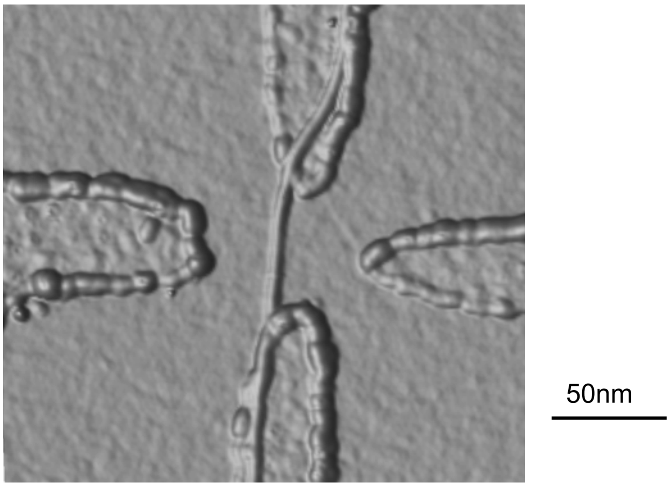
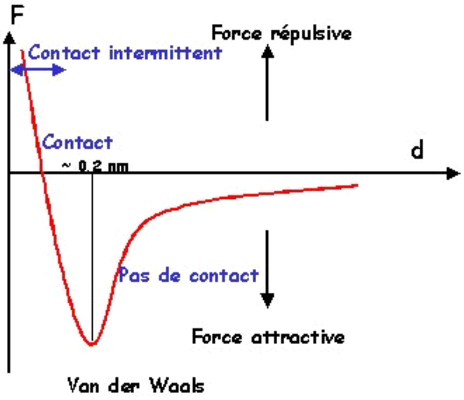


Image topographique de quatre électrodes en or palladium réalisée par microscopie à force atomique.
Un nano tube de carbone relie les deux électrodes verticales et est soumis à un champ électrique transverse : il forme un transistor moléculaire élémentaire (image CNRS).

Le microscope à force atomique peut fonctionner selon plusieurs modes distincts suivant le type de force que l'on veut analyser. Il permet d'étudier la morphologie des surfaces à l'échelle nanométrique. Il fournit alors des informations sur certaines propriétés mécaniques ou physiques des matériaux. Nous allons nous limiter à l'étude du fonctionnement en mode dit « non contact » qui est basé sur l'utilisation des forces de Van der Waals qui sont des forces d'interaction attractives.

PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT EN MODE NON CONTACT : (pas de contact entre la pointe du micro levier (appelé également cantilever) et la surface de l'échantillon à analyser)

Le principe consiste à déplacer sur la surface étudiée une pointe sonde (appelée également *tip*) extrêmement fine fixée perpendiculairement à l'extrémité d'un minuscule bras de levier élastique (micro levier). Tandis que la pointe décrit des lignes parallèles sur une petite zone de la surface, la force d'interaction pointe surface, mesurée par le biais de la fréquence d'oscillation du micro levier, est gardée constante en ajustant en permanence la position verticale de l'échantillon au moyen d'une boucle d'asservissement. L'enregistrement des déplacements successifs de l'échantillon donne alors une cartographie en fausses couleurs de la surface explorée, dont le relief est représentatif à la fois de la topographie et de certaines propriétés physiques de la surface.



Bilan des forces s'exerçant sur le micro levier de l'AFM en fonction de la distance pointe surface.

Le micro levier est soumis à une oscillation forcée à sa fréquence de résonance à l'aide d'un petit élément piézo-électrique sur lequel il est fixé. L'existence d'une force ou plus précisément, d'un gradient de force, modifie la constante de raideur effective du ressort. Si l'échantillon exerce sur la pointe une force attractive (forces de Van der Waals), le gradient de la force est positif et il en résulte une diminution de la constante de raideur, avec comme conséquence une réduction de la fréquence de résonance.

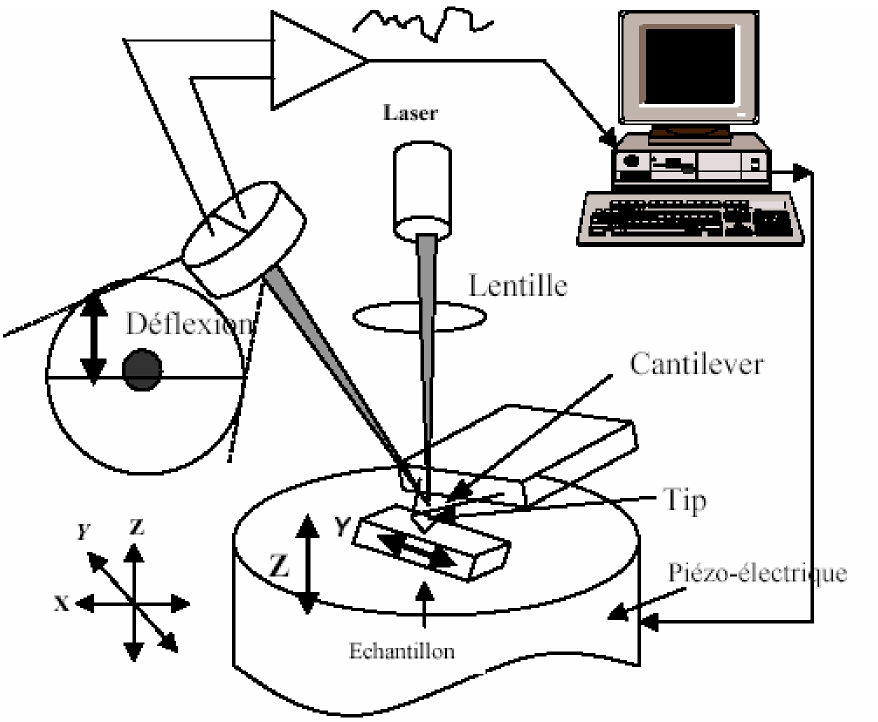


Schéma de principe de l'AFM utilisant comme système de détection la déflexion optique d'un faisceau laser

Données principales

Module d'Young E = 1,69.10^{11} N/m²,

Dimensions du micro levier :

- longueur l = 125 µm,
- épaisseur h = 4 µm,
- largeur b = 30 µm,

Masse volumique du silicium ρ = 2,33 g/cm^3 = 2 330 kg/m^3

Gravitation g = 9,81 m/s²,

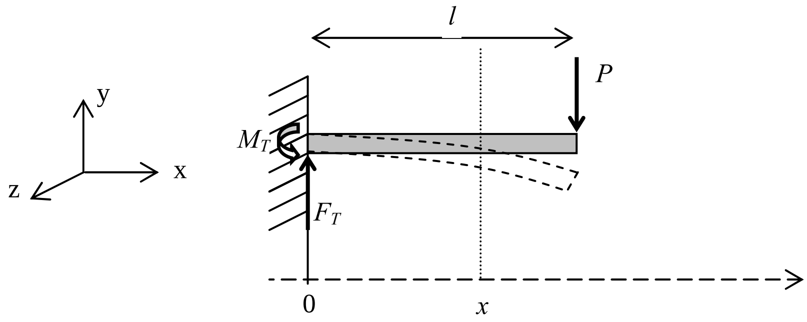
$d_{31} = 100$ pC/N (*Piezoelectric Stain Constant*)

Moment d'inertie de la poutre par rapport à l'axe neutre passant par son centre de gravité $I = \frac{b.h^3}{12}$.

Sujet

Partie 1 : Modélisation du micro levier

Le micro levier de l'AFM peut être assimilé à une *poutre cantilever*. On appelle *poutre cantilever* une poutre maintenue à une extrémité seulement, mais de manière telle que son axe ne puisse pas pivoter en ce point. La figure ci-dessous représente ce type de poutre. L'extrémité de droite peut fléchir librement, tandis que l'extrémité de gauche est maintenue rigidement. On dit que l'extrémité de gauche est « encastrée ». La réaction du mur qui encastre l'extrémité de gauche de la poutre est une force verticale F_T associée à un couple M_T agissant dans le plan de charge.



I.A - Détermination de la fréquence d'oscillation du cantilever

Pour de petites déflexions, cette structure vérifie l'équation d'Euler-Bernoulli de la flexion d'une poutre :

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

où M désigne le moment de flexion à la distance (x) de l'extrémité de la poutre, E le module d'élasticité du matériau, I le moment d'inertie de la poutre par rapport à l'axe neutre qui passe par son centre de gravité, et y la déflexion de la poutre à la distance (x) de son extrémité.

Par définition, M est la somme algébrique des moments des forces extérieures à un des côtés de la section x (à droite par exemple) par rapport à un axe passant par cette section et perpendiculaire au plan de la figure.

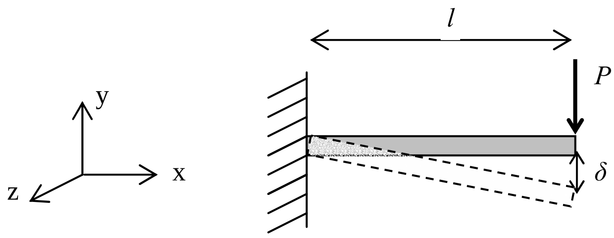
I.A.1 - D***éterminer*** *l'expression de* M *en fonction de P, l et x.*

I.A.2 - ***Déterminer*** *l'expression de* y *en fonction de P, l, E, I et x en observant que la pente de la poutre est nulle sur le mur puisque celle-ci est encastrée.*

I.A.3 – ***Déterminer*** *l'expression de la déflexion maximale* δ *à l'extrémité droite de la poutre.*

I.A.4 - ***Déterminer*** *l'expression de P en fonction de* δ*, en déduire l'expression de la raideur k du ressort équivalent à l'extrémité de la poutre.* ***Calculer*** *k.*

On note δ, $\dot{\delta}$ et $\ddot{\delta}$, respectivement la déflexion, la vitesse et l'accélération de l'extrémité de la poutre entièrement en silicium. La poutre est assimilée à une masse ponctuelle placée en son centre de gravité. La déflexion étant de faible amplitude, on supposera que la poutre n'est pas déformée et reste donc linéaire comme représenté ci-dessous.



I.A.5 - ***Déterminer*** *l'expression de l'énergie cinétique de la poutre en fonction de m et* $\dot{\delta}$*.*

I.A.6 - ***Déterminer*** *l'expression de la variation d'énergie potentielle d'attraction terrestre au cours du mouvement en fonction de* δ *.*

I.A.7 – ***Déterminer*** *l'expression de l'énergie emmagasinée par le ressort équivalent en fonction de* δ *.*

I.A.8 - ***Calculer*** *E_{p1} et E_{p2} pour une déflexion maximale de 30 nm.* ***Conclure****.*

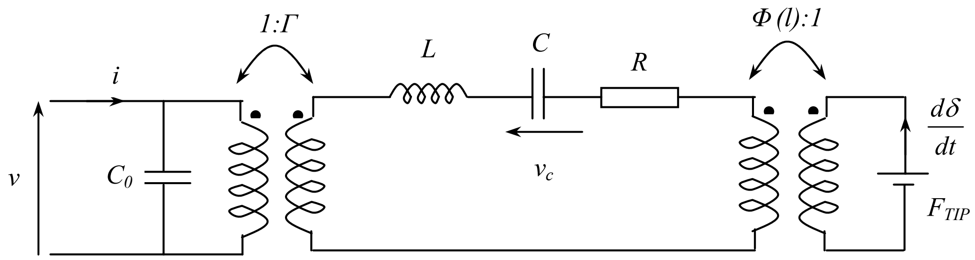
I.A.9 - ***Déterminer*** *l'expression de l'énergie mécanique du cantilever. En supposant que celle-ci est conservée au cours du mouvement, en* ***déduire*** *l'équation du mouvement de l'extrémité du ressort de la forme :* $m_r\ddot{\delta} + k_r\delta = 0$.

I.A.10 - ***Déterminer*** *les expressions de m_r et de k_r en fonction de m, b, h et L.* ***Calculer*** *m_r et k_r.*

I.A.11 - ***Déterminer*** *l'expression de la fréquence d'oscillation du ressort f en fonction de E, h, l et ρ.* ***Calculer*** *f.*

I.B - Détermination de la fonction de transfert du cantilever : $\dfrac{\overline{\delta}(p)}{\overline{V}(p)}$

Le cantilever est en réalité un bilame dont une des lames possède des propriétés piézo-électriques. On applique une tension *V* aux bornes de ses électrodes. Afin de calculer la fonction de transfert du cantilever, on utilisera le modèle électrique ci-dessous. La déformation mécanique créée est caractérisée par l'amplitude de la déflexion de l'extrémité du cantilever δ . *L*, *C*, *R* et C_0 constituent le modèle électrique du cantilever. F_{TIP} est une force perpendiculaire à l'extrémité du cantilever qui correspond à la somme algébrique des forces externes qui lui sont appliquées. Dans un premier temps, on considérera que la distance pointe surface est infinie, c'est-à-dire que l'on néglige l'interaction entre le micro levier et l'échantillon : $F_{TIP} = 0$.



On donne :

$$\Gamma = \frac{d_{31} lhE\Phi'(l)}{2} \text{ avec } \Phi'(l) = \left.\frac{d\Phi(x)}{dx}\right|_{x=l}$$

$$\Phi(x) = \cos(kx) - \cosh(kx) - \frac{\cos(kl)+\cosh(kl)}{\sinh(kl)+\sin(kl)}(\sin(kx) - \sinh(kx)) \text{ avec } kl = 1{,}875$$

I.B.1 - ***Calculer*** $\Phi(l)$ *et* $\Phi'(l)$ *. En* ***déduire*** *la valeur de* Γ *.*

On note $\overline{\Delta}(p)$, $\overline{V}(p)$ et $\overline{V}_c(p)$ les transformées de Laplace de $\delta(t)$, *v(t)* et *$v_c(t)$*.

I.B.2 - ***Déterminer*** *l'expression de la transmittance* $\dfrac{\overline{V_c}(p)}{\overline{V}(p)}$.

I.B.3 - *En* ***déduire*** *l'expression de la transmittance* $\dfrac{\overline{\Delta}(p)}{\overline{V}(p)}$.

I.B.4 - *En régime permanent,* ***calculer*** *le coefficient a, tel que :* $\delta = a.d_{31}\left(\dfrac{2l}{h}\right)^2 v$.

La valeur exacte de *a* est donnée par $\delta = \dfrac{M_{eq}l^2}{2IE}$ avec $M_{eq} = \dfrac{d_{31}bh}{2E}v$.

I.B.5 - ***Calculer*** *la valeur exacte de a. Avec le modèle utilisé,* ***calculer*** *l'erreur sur a.*

I.B.6 - Le cantilever a un facteur de qualité *q* de 400.

Calculer *le coefficient d'amortissement* ξ *du modèle équivalent du cantilever. En* ***déduire*** *sa fréquence de résonance* f_r*. Déterminer l'expression de R en fonction de* ξ*, L et C. Calculer R.*

I.C- Evaluation de l'influence des forces de Van der Waals

Les forces de Van der Waals agissent sur des distances de quelques nanomètres. Elles sont assez fortes pour déplacer des objets macroscopiques sur des distances microscopiques. Nous allons étudier l'influence de la force de Van der Waals sur la déflexion du micro levier d'un AFM. Sous atmosphère normale ou dans le vide, elle est typiquement de l'ordre de 10^{-9} N à une distance de 2 nm.

Pour répondre à la question suivante, on donne a = 0,75.

I.C.1 - ***Calculer*** *l'amplitude de la déflexion du micro levier lorsqu'on applique une tension d'amplitude 0,1 Volt aux bornes du piézo-électrique.*

I.C.2 - ***Calculer*** *la variation de la déflexion entre le moment où le micro levier est écarté à une distance suffisante telle qu'on peut considérer qu'il n'y a pas d'interaction pointe surface et le moment où la pointe a été rapprochée de la surface et est soumise à une force attractive de* 10^{-9} *N.* ***Conclure****.*

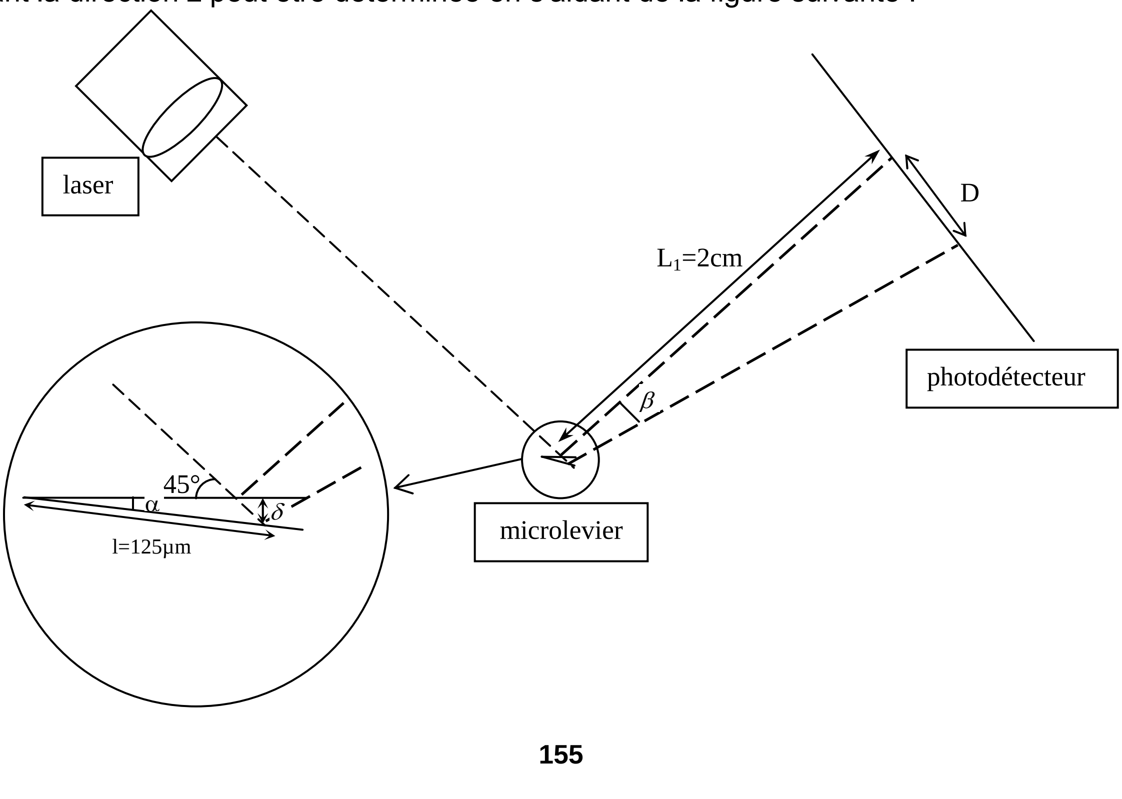
En réalité, les forces de Van der Waals provoquent une dérive du facteur de qualité du système. Donc les paramètres du modèle seront modifiés en raison de l'interaction pointe surface.

I.D – Etude du capteur à photodiodes

Les déplacements du micro levier sont mesurés en détectant le faisceau issu d'une diode laser qui se réfléchit sur le dessus du micro levier en direction d'un photodétecteur. Ce dernier est composé de deux secteurs A et B.

On utilise généralement une diode laser de puissance 1 mW. Le photodétecteur doit être choisi sur les critères suivants : surface de détection adaptée à la géométrie du faisceau, faible courant d'obscurité, bonne sensibilité et puissance maximale par unité de surface. La sensibilité du système doit être très grande puisqu'il faut être capable de détecter des variations de hauteur inférieures au dixième d'Angström pour obtenir la résolution atomique.

La relation entre le mouvement du faisceau laser sur le photodétecteur et la déflexion du micro levier suivant la direction z peut être déterminée en s'aidant de la figure suivante :



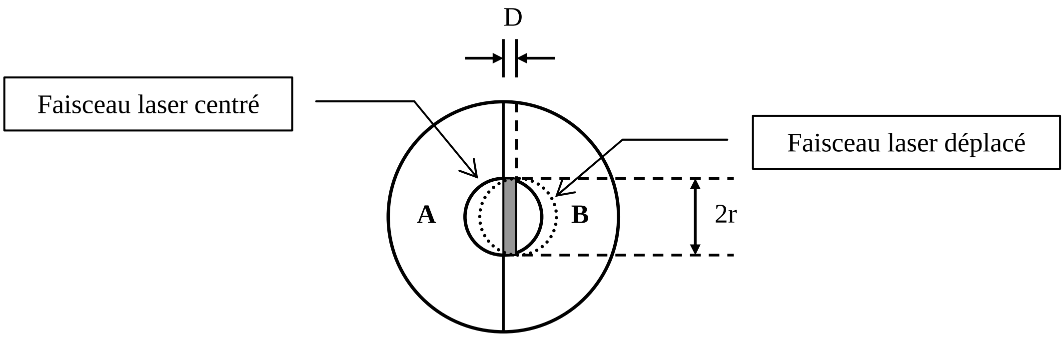
On note δ, la déflexion du micro levier.

I.D.1 – ***Donner*** *l'angle de déflexion β. L'angle α étant petit,* ***calculer*** *l'expression de D en fonction de l, δ et L_1.*

I.D.2 - *En* ***déduire*** *la valeur de k tel que D = k. δ.*

On suppose que le faisceau laser frappant le photodétecteur est circulaire, de rayon r et que sa puissance est répartie uniformément. Le faisceau laser engendre un courant de photodétecteur I qui se subdivise en deux :

$I = I_B - I_A$, avec $I_0 = I_A = I_B$ = courant sur chacun des secteurs du photodétecteur lorsque le spot est centré. On représente ci-dessous le faisceau laser. La surface hachurée sur la figure représente l'augmentation de surface sur le secteur B du photodétecteur.



Déplacement du faisceau laser d'une distance D de la zone A vers la zone B

I.D.3 - *Lorsque le faisceau se déplace de la distance D,* ***calculer*** *l'augmentation correspondante du courant I_B.*

Le courant I_A diminue de la même quantité. On prendra r = 1,5 mm et I_0 = 2,5 µA.

I.D.4 - ***Calculer*** *la variation maximale du courant ΔI entre les deux secteurs pour une déflexion maximale de 30 nm.*

I.E – Partie pédagogique relative aux photodétecteurs

I.E.1 - ***Citer*** *différentes catégories de photodétecteurs en précisant leurs principales caractéristiques.*

I.E.2 - ***Classer*** *les principales applications en distinguant celles de type analogique et celles de type logique.*

Préciser *les critères de choix correspondants.*

I.E.3 – ***Proposer*** *une activité pédagogique mettant en œuvre un photodétecteur au sein d'un système de votre choix (intervention niveau BTS électronique ou BTS IRIS). Vous préciserez les objectifs et les moyens mis en œuvre pour réaliser cette activité.*

Partie 2 : Oscillations entretenues du micro levier

Pour la suite on donne la fonction de transfert du cantilever lorsque l'interaction pointe surface est négligeable :

$$\frac{\overline{\Delta}(p)}{\overline{V}(p)} = \frac{A_0}{1 + \frac{2\xi p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0{}^2}} \quad \text{avec } A_0 = 3.10^{-7} \;;\; \xi = 1{,}25.10^{-3} \;;\; \omega_0 = 2{,}18.10^6 \, rad/s$$

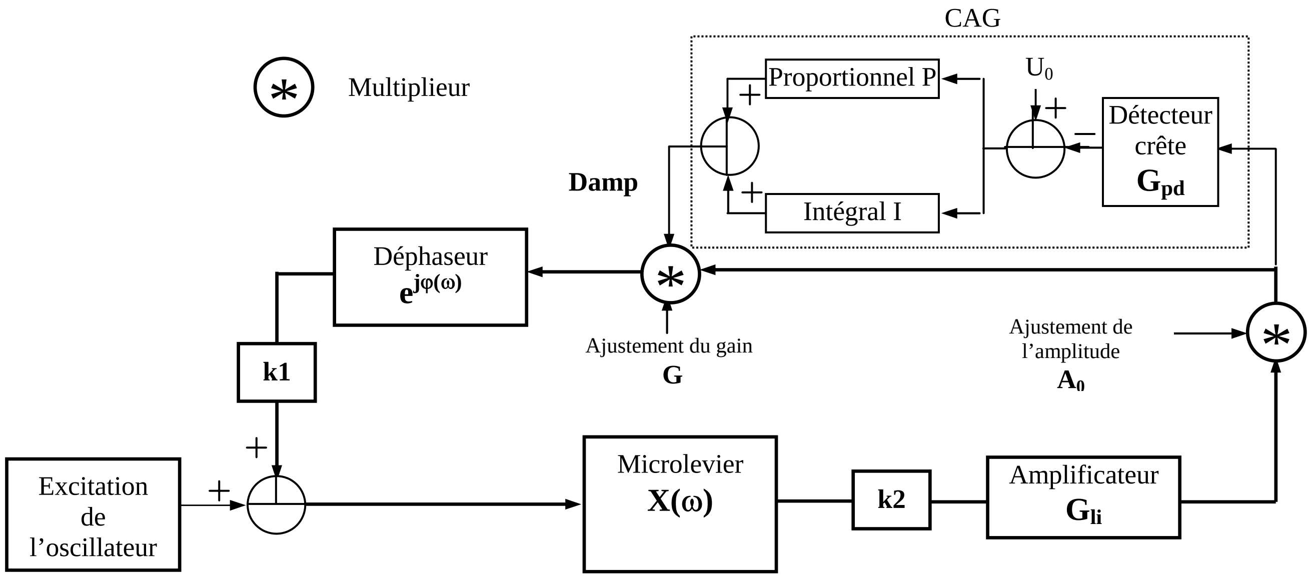
On applique un échelon de tension entre les électrodes du cantilever. Le micro levier entre en oscillations amorties.

II.1 – *Calculer* *le temps mis pour une diminution de l'amplitude des oscillations de 50%.*

Le microscope fonctionne en mode non contact, il est donc nécessaire de conserver une amplitude constante.

On étudiera le schéma suivant où k1 (N/V) et k2 (V/m) sont des coefficients qui correspondent respectivement au micro levier piézo-électrique et au capteur optique. La cellule CAG réalise un contrôle automatique de gain.

Deux blocs multiplieurs intégrés dans la boucle permettent à l'utilisateur de régler le gain G placé en aval du CAG et l'amplitude du signal grâce à un gain A_0 ajustable. G peut être choisi grâce à un triple sélecteur G = 1, 10 ou 100.



Lorsqu'on applique une force F à l'extrémité du micro levier, la pointe fléchit. Pour une distance D entre la pointe et la surface, le déplacement de la pointe du micro levier revient à calculer le déplacement d'une masse *m* couplé à un ressort de raideur k_a et soumise à une force de frottement visqueux.

Sa fonction de transfert est une fonction de transfert du second ordre de la forme :

$X(\omega) = \dfrac{1}{-m\omega^2 + j2\lambda_a m\omega_{0a}\omega + k_a}$ avec λ_a coefficient d'amortissement et k_a raideur du ressort fonction de D.

II.2 - *Donner* *l'expression de ω_{0a} en fonction de λ_a et k_a.*

II.3 - *Exprimer* *la condition d'oscillation de la boucle.*

II.4 - *Donner* *l'équation relative à l'argument des deux membres de l'équation précédente.* ***Exprimer*** *$\varphi(\omega)$ en fonction de λ_a, ω_{0a} et ω.*

Pour D $\to \infty$, le coefficient d'amortissement et la raideur du ressort sont notés respectivement λ_0 et k_0.

II.5 - *Sachant que k1 = 1,26.10^{-5},* ***exprimer*** *puis* ***calculer*** λ_0, k_0 *et m en fonction des paramètres de la fonction de transfert du second ordre donnée précédemment.*

Le déphaseur est choisi tel que la fréquence d'oscillation de la boucle soit égale à la fréquence de propre du micro levier lorsque D $\to \infty$.

II.7 - ***Calculer*** *alors* $\varphi(\omega_0)$*.*

Le facteur de résonance Q d'un micro levier est un paramètre important. Il doit être le plus élevé possible.

Pour un coefficient d'amortissement très faible, on pose Q $\approx \frac{1}{2\lambda_a}$.

II.8 - ***Montrer*** *alors que* $X(\omega)$ *peut se mettre sous la forme :* $X(\omega) = \dfrac{X_0\left(\dfrac{\omega_0}{p}\right)}{1+Q\left(\dfrac{p}{\omega_0}+\dfrac{\omega_0}{p}\right)}$.

Au voisinage de ω_0, cette fonction peut se mettre sous la forme $X(\omega) = \dfrac{-j.X_0\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}{1+2j.Q.\dfrac{\delta\omega}{\omega_0}}$ avec $\delta\omega = \omega - \omega_0$.

II.9 - ***Calculer*** *l'argument de* $X(\omega)$ *noté* $\Phi(\omega)$ *puis* ***donner*** *l'expression de sa pente aux alentours de* ω_0*.*

En ***déduire*** *l'intérêt d'avoir un très grand facteur de qualité.*

Le déphaseur est composé de deux circuits identiques dont la transmittance est de la forme $\dfrac{Tp+1}{-Tp+1}$.

II.10 - ***Déterminer*** *l'expression de T en fonction de* ω_0*. Calculer T.*

II.11 - ***Représenter*** *l'allure du diagramme de Bode des deux cellules en cascade sur les deux diagrammes du DOCUMENT REPONSE N°1.* Vous choisirez les graduations utilisées sur l'axe des ordonnées de droite.

Lorsqu'on rapproche la pointe de la surface, les coefficients λ_a et k_a du modèle équivalent du micro levier évoluent. Sur le DOCUMENT REPONSE N°1, les diagrammes de Bode de X(ω) pour D $\to \infty$ et pour D = 13 nm sont représentés.

II.12 - ***Déterminer*** *graphiquement la pulsation propre du micro levier pour D = 13 nm.*

II.13 - ***Déterminer*** *la valeur de la pulsation d'oscillation de la boucle* ω_{osc}*.* ***Calculer*** $\varphi(\omega_{osc})$*.* ***Conclure****.*

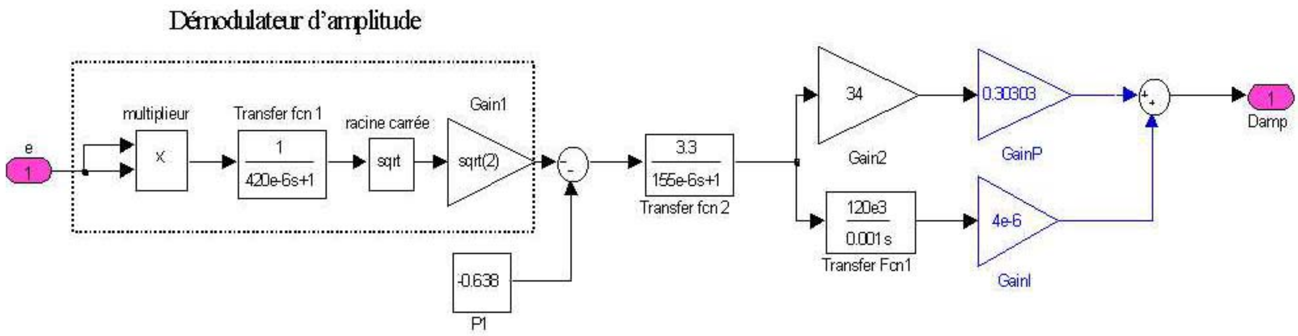
II.14 - *En supposant que la fréquence d'oscillation de la boucle est égale à la fréquence propre du micro levier,* ***donner*** *l'expression de Damp en fonction des éléments du circuit.*

II. 15 - *Donner l'expression de l'amplitude Xm des oscillations :*

- *dans le cas où I = 0 et P $\neq$ 0*
- *et dans le cas où I $\neq$ 0 et P $\neq$ 0.*

II.16 - ***Expliquer*** *dans ce cas l'intérêt d'un correcteur PI (sachant que le coefficient d'amortissement* λ_a *dépend de la distance pointe surface).*

Le schéma bloc du contrôle automatique de gain est donné ci-dessous. Il s'agit d'un modèle réalisé afin de simuler le comportement de l'AFM.



Le signal d'entrée est de la forme e(t) = E. cos(2πft) avec f de l'ordre de 330 kHz.

II.17 - ***Montrer*** *que le module encadré en pointillés réalise une démodulation d'amplitude.*

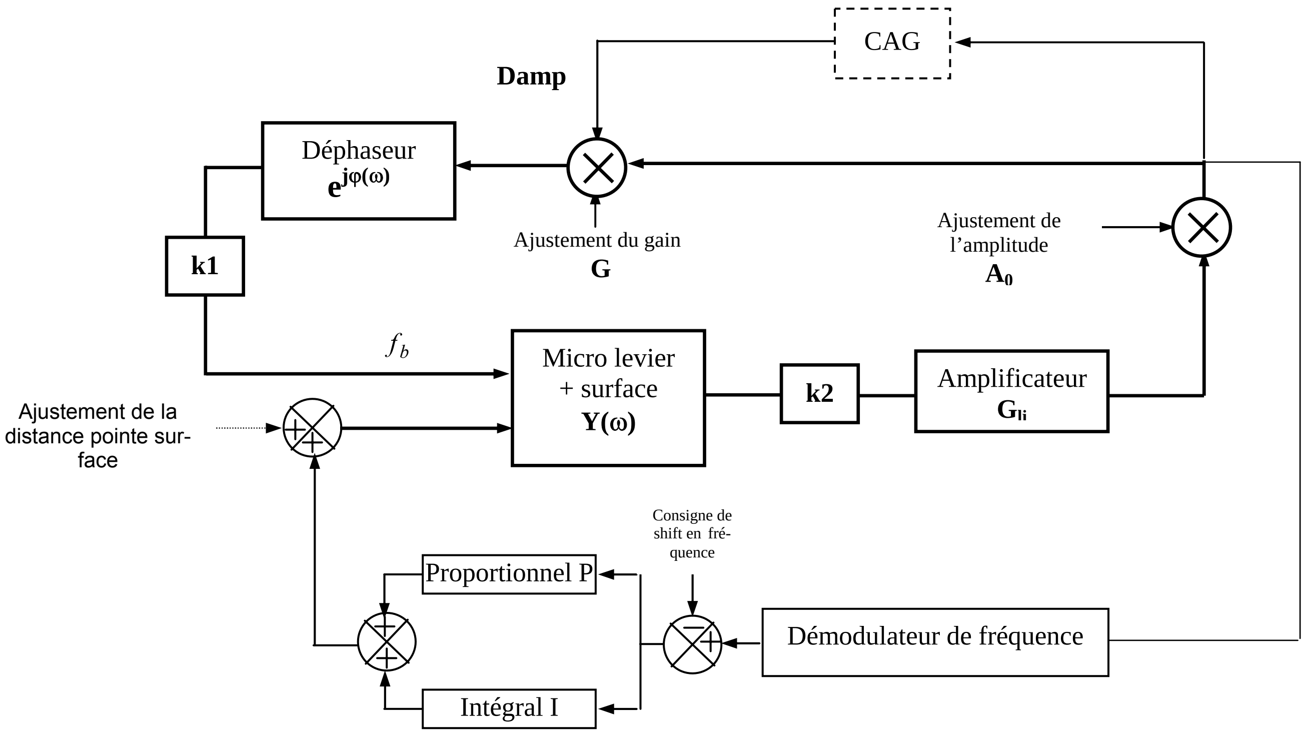
Le circuit réel de détection de l'amplitude est un détecteur à diode.

II.18 - ***Représenter*** *et* ***caractériser*** *les éléments du circuit réel.* ***Donner*** *les différences de comportement qui existent entre le circuit réel et son modèle.*

Partie 3 : Traitement du signal issu du capteur à photodiodes

III.A – Modélisation du cantilever

La variation de fréquence du signal issu du photodétecteur est fonction de la distance pointe surface. Cette propriété permet, à partir du signal issu du photodétecteur, de reconstituer l'image de la surface de l'échantillon observé. Le signal est donc démodulé en fréquence puis traité par l'informatique associée. Afin de conserver une distance pointe surface constante, une boucle d'asservissement permet d'ajuster la commande du piézo-électrique sur lequel repose l'échantillon.



La transmittance Y(ω) caractérise le micro levier ainsi que la surface sur laquelle repose l'échantillon. Elle tient donc compte de la force attractive de Van der Waals qui s'exerce entre la pointe et la surface. Afin de déterminer cette transmittance, on donne l'équation différentielle non-linéaire régissant l'amplitude du mouvement de la pointe du cantilever x :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda_0 m\omega_0 \frac{dx}{dt} + k_0 x = f_b + \frac{HR}{6(D-x)^2}$$

où f_b est la force appliquée par la boucle d'asservissement de l'amplitude étudiée dans la partie 2.

H est la constante de Hamaker, D est la distance pointe surface, R est le rayon de la pointe, m, λ_0, k_0 et ω_0 sont respectivement la masse, le coefficient d'amortissement, la constante de raideur et la pulsation propre du micro levier pour D $\to \infty$. Cette nouvelle équation va permettre d'étudier les variations de la fréquence d'oscillation du cantilever en fonction de la distance pointe surface D.

III.A.1 - *En supposant que x << D,* ***proposez*** *une équation différentielle linéaire de la forme :*

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + c(D)x = f_b + d(D)$$

III.A.2 - ***Donner*** *l'expression de la fréquence propre du cantilever en fonction de D.*

On donne : $\frac{HR}{6}$ = 3,333.10^{-28}, m = 12,9.10^{-12} kg e t k_0 = 40 N/m

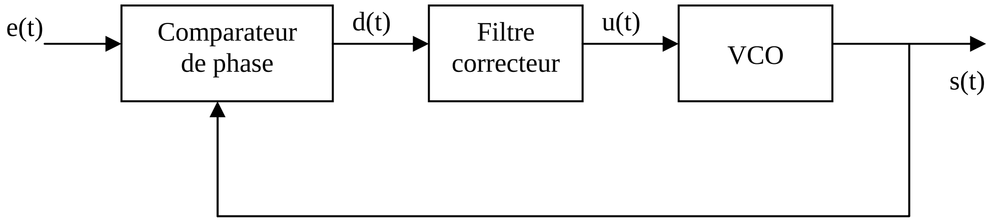
III.A.3 - ***Tracer*** *la variation de fréquence Δf occasionnée par la présence d'une force attractive de Van der Waals en fonction de D pour une distance pointe surface variant de 10 nm à 20 nm.*

On se place à une distance D égale à 13 nm. Δf a une valeur de -1,063 Hz.

III.A.4 - ***Linéariser*** *Δf (D) aux alentours de ce point de fonctionnement pour obtenir une équation de la forme : $\Delta f + 1{,}063 = k\,(D - 13.10^{-9})$.* ***Calculer*** *k.*

III.B – Démodulation de fréquence

La démodulation de fréquence est réalisée à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase dont le principe est rappelé ci-dessous.



On suppose que :

- le comparateur de phase instantanée est linéaire et parfait, et vérifie la relation :
$$d(t) = K_1 \varphi_{er}(t) = K_1.(\varphi_e(t) - \varphi_s(t))$$
- le filtre a pour fonction de transfert $F_2(p)$,
- l'oscillateur contrôlé en tension (VCO) est linéaire de fréquence centrale f_0 et vérifie la relation :
$$f_s(t) = f_0 + K_3.u(t)$$

Le signal incident e(t) est modulé en fréquence. Il s'écrit sous la forme :

$e(t) = A_c \sin(2\pi f_c t + 2\pi \int \delta f(t)dt)$ avec f_c la fréquence d'oscillation du micro levier pour une distance pinte surface de 13 nm, soit 300 kHz. $\delta f(t)$ étant la variation de fréquence image de la distance pointe surface.

III.B.1 - ***Déterminer*** *la valeur de f_0, fréquence centrale du VCO.*

III.B.2 - *Lorsque la PLL est verrouillée,* ***donner*** *la relation entre $\delta f(t)$ et la tension $u(t)$ à l'entrée du VCO en fonction de K_3, gain du VCO.*

III.B.3 - ***Donner*** *le schéma bloc du système bouclé, avec pour grandeur d'entrée et de sortie $\Phi_e(p)$ et $\Phi_s(p)$.*

Calculer *la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{\Phi_{er}(p)}{\Phi_e(p)}$ où $\Phi_{er}(p)$ désigne la transformée de Laplace de l'erreur de phase.*

III.B.4 - *Dans le cas où $F_2(p) = 1$,* ***calculer*** *l'erreur de phase en régime permanent, dans le cas :*

- *d'un échelon de phase en entrée $\Phi_e(p) = \dfrac{\Delta\Phi}{p}$,*

- *d'un échelon de fréquence en entrée $\Phi_e(p) = \dfrac{\Delta\omega}{p^2}$,*

Donner *les correspondances physiques de ces différentes entrées dans le cadre de l'application envisagée.* ***Choisir*** *le gain de boucle pour minimiser l'erreur de phase.*

III.B.5 - ***Donner*** *maintenant le schéma bloc de grandeur d'entrée $\Delta F(p)$ et de sortie $U(p)$, où $\delta f(t)$ représente la variation de fréquence du signal d'entrée en faisant apparaître $\Phi_e(p)$, $\Phi_s(p)$, $\Phi_{er}(p)$ et $D(p)$.*

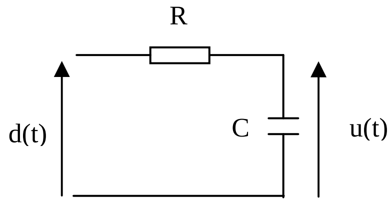
III.B.6 - *Exprimer* *la fonction de transfert* $T(p)=\dfrac{U(p)}{\Delta F(p)}$.

III.B.7 - *Pour* $F_2(p)=1$, ***mettre*** *cette fonction sous la forme* $T(p)=T_0.\dfrac{1}{1+ap}$.

Le comparateur de phase est, en réalité constitué d'un multiplieur.

III.B.8 - *Expliquer* *la nécessité d'introduire un filtre passe-bas* $F_2(p)$.

On utilise un filtre $F_2(p)$ dont la structure est donnée ci-dessous :



III.B.9 - *Etablir* *la transmittance* $F_2(p)=\dfrac{U(p)}{D(p)}$.

III.B.10 - *Calculer* *la nouvelle fonction de transfert* $G(p)=\dfrac{\Phi_{er}(p)}{\Phi_e(p)}$.

III.B.11 - *Calculer* *l'erreur de phase en régime permanent, dans le cas :*

- *d'un échelon de phase en entrée* $\Phi_e(p)=\dfrac{\Delta\Phi}{p}$,
- *d'un échelon de fréquence en entrée* $\Phi_e(p)=\dfrac{\Delta\omega}{p^2}$,

Le comparateur de phase a une caractéristique en cos (x) linéarisée autour de $\dfrac{\pi}{2}$.

III.B.12 - *Montrer* *qu'il existe une valeur maximale de* $\Delta\omega$ *pour laquelle la PLL reste accrochée.* ***Donner*** *l'expression de cette valeur.*

III.B.13 - *Calculer* $T(p)$ *et la* ***mettre*** *sous la forme :* $T(p)=\dfrac{T_0}{1+\dfrac{2mp}{\omega_n}+\dfrac{p^2}{\omega_n{}^2}}$.

Exprimer T_0, m *et* ω_n *en fonction de* K_1, K_3 *et* $\mathrm{T}=R.C$.

On impose m = 0,707 et $\mathrm{T}=\dfrac{100}{2\omega_c}$.

III.B.14 - *Calculer* *les valeurs correspondantes de* ω_n, T *et* K_3.

Calculer *le temps de réponse de la boucle correspondant.*

Calculer *la valeur maximale de* $\Delta\omega$ *dont l'expression a été calculée précédemment.*

En ***déduire*** *la valeur maximale de* Δf.

III.C – Travail pédagogique relatif à la PLL

III.C.1 - *Dans le cadre du BTS électronique,* ***proposer*** *une séquence pédagogique portant sur les systèmes de transmission et de réception analogiques et numériques. Dans ce cadre,* ***développer*** *les principes des systèmes utilisant une boucle à verrouillage de phase.*

Il est notamment demandé :

- *de **fixer** les pré-requis nécessaires,*
- *de **donner** le plan de la séquence pédagogique en indiquant les volumes horaires correspondant aux différentes parties de la séquence.*

III.C.2 – Développement d'une séance de TP

La PLL sera utilisée au sein d'un récepteur de radiodiffusion FM (88 à 108 MHz) dont vous présenterez le principe.

***Décomposer** ce système en éléments fonctionnels simples. **Mettre** en évidence la mise en œuvre de plusieurs PLL au sein d'un tel système.*

*En choisissant entre le synthétiseur de fréquence et le démodulateur FM, **expliquer** son principe de fonctionnement. **Préciser** les caractéristiques fondamentales de la fonction choisie.*

***Proposer** une transposition du système réel à un système didactique : cahier des charges, accessibilité aux signaux, conditions de mesure, etc.*

***Proposer** des activités pédagogiques permettant aux élèves de mettre en évidence et de mesurer les caractéristiques du système et ainsi de valider le cahier des charges.*

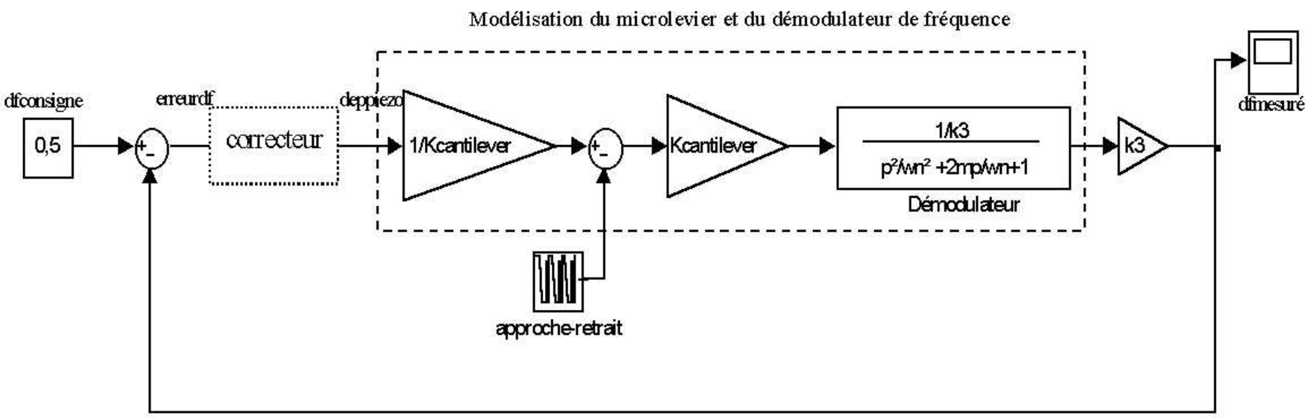
III.D – Régulation de la position du piézo-électrique

Après traitement, le signal issu du photodétecteur permet de déterminer la distance pointe surface à un instant donné. En effet, les variations de la fréquence d'oscillation du micro levier sont fonction des variations de la distance entre la pointe et la surface de l'échantillon donc du relief de celui-ci. Après démodulation du signal issu du photodétecteur et connaissant la vitesse de balayage de la pointe, il est alors possible de reconstituer l'image de l'échantillon observé.

Une boucle de retour permet de commander l'altitude z du composant piézo-électrique sur lequel repose l'échantillon afin de conserver une variation de fréquence δf constante. Ce signal appelé ici $deppiezo$, permet donc de conserver une distance constante entre la pointe et l'échantillon.

Le schéma bloc du système régulé est représenté ci-dessous :

On donne : k3 = 4 417,4 rad/s/V, Kcantilever = 245,29.10^6 Hz/m, m = 0,707 et wn = 26 687,3 rad/s



δf est fixé à 0,5 Hz. L'entrée $approche-retrait$ que l'on notera AR correspond aux variations de la distance pointe surface dues aux reliefs de l'échantillon parcourus par la pointe de l'AFM.

III.D.1 - ***Déterminer*** *l'expression de $dfmesuré$ en fonction de $erreurdf$ et de AR.*

III.D.2 - *Pour une consigne de 0,5 Hz, et lorsque l'échantillon ne présente pas de relief, **calculer** l'erreur statique de fréquence $erreurdf$.*

III.D.3 - ***Calculer*** *la variation finale de $erreurdf$ en réponse à un échelon d'amplitude 10 nm sur l'entrée AR.*

III.D.4 - *Sur les DOCUMENTS REPONSE 2 ET 3,* ***représenter*** *le diagramme de Black de la fonction de transfert* $\frac{dfmesuré}{dfconsigne}$ *en boucle ouverte.*

Correction proportionnelle

Afin d'améliorer la précision et de diminuer la sensibilité au bruit du système bouclé, un correcteur proportionnelle est introduit.

L'objectif étant d'obtenir une régulation « optimale », on fixera la surtension du système en boucle fermée à 2,3 dB.

III.D.5 - ***Déterminer*** *graphiquement la valeur du gain Kp du correcteur proportionnel correspondant.*

III.D.6 - *Sur le DOCUMENT REPONSE 2,* ***représenter*** *le diagramme de Black de la nouvelle fonction de transfert* $\frac{dfmesuré}{dfconsigne}$ *en boucle ouverte.*

III.D.7 - *Pour une consigne de 0,5 Hz,* ***calculer*** *la nouvelle erreur statique de fréquence* $erreurdf$ *.*

III.D.8 - ***Calculer*** *la variation finale de* $erreurdf$ *en réponse à un échelon d'amplitude 10 nm sur l'entrée* AR *.*

III.D.9 - ***Déterminer*** *graphiquement la fréquence de résonance* ωr *du système en boucle fermée. En* ***déduire*** *le coefficient d'amortissement et la fréquence propre du système en boucle fermée.* ***Calculer*** *le temps de réponse du système bouclé.*

Correction Proportionnelle Intégrale

Les performances du système bouclé n'étant pas satisfaisantes, on introduit un correcteur PI dont la transmittance est de la forme $P.\left(\frac{I}{\tau.p}+1\right)$, avec P et I , les coefficients réglables du correcteur.

III.D.10 - ***Tracer*** *le diagramme de Bode asymptotique d'un tel correcteur.*

Afin de ne pas introduire de retard de phase aux alentours de ωr , on choisira $\frac{I}{\tau}=\frac{\omega r}{10}$. De plus, on souhaite conserver une surtension en boucle fermée de 2,3 dB.

III.D.11 - ***Calculer*** $\frac{I}{\tau}$ *.* ***Déterminer*** *graphiquement le gain* P *du correcteur.*

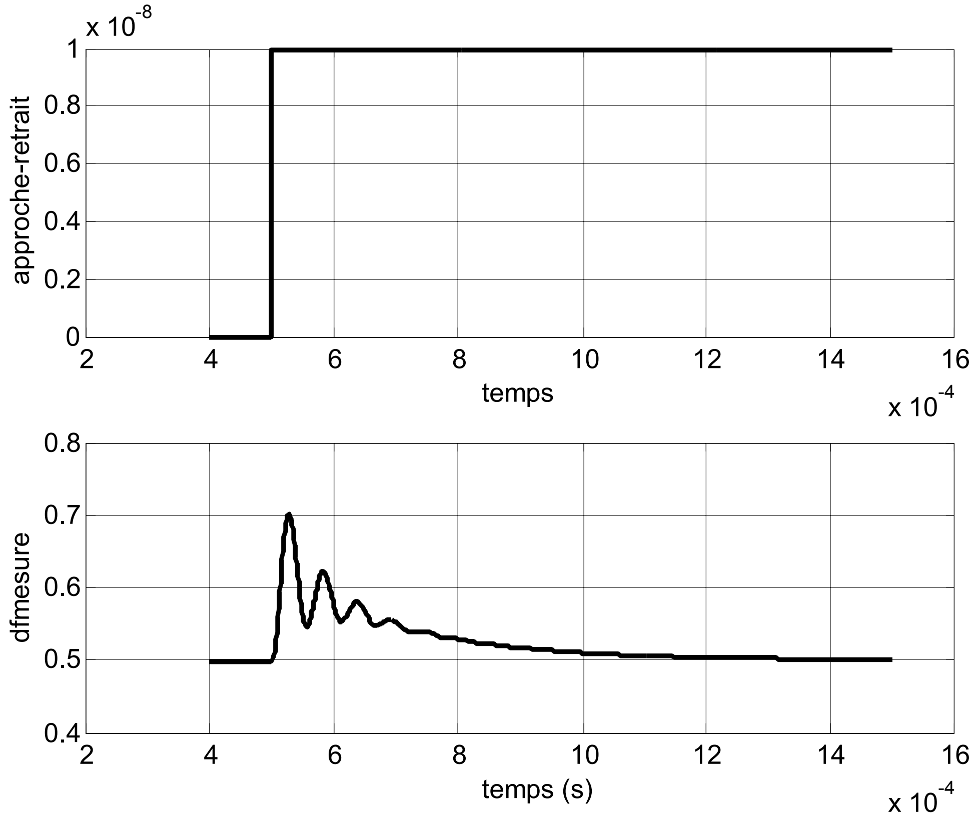
III.D.12 - *Sur le DOCUMENT REPONSE 3,* ***représenter*** *le diagramme de Black de la nouvelle fonction de transfert* $\frac{dfmesuré}{dfconsigne}$ *en boucle ouverte.*

III.D.13 - *Pour une consigne de 0,5 Hz,* ***calculer*** *la nouvelle erreur statique de fréquence* $erreurdf$ *.*

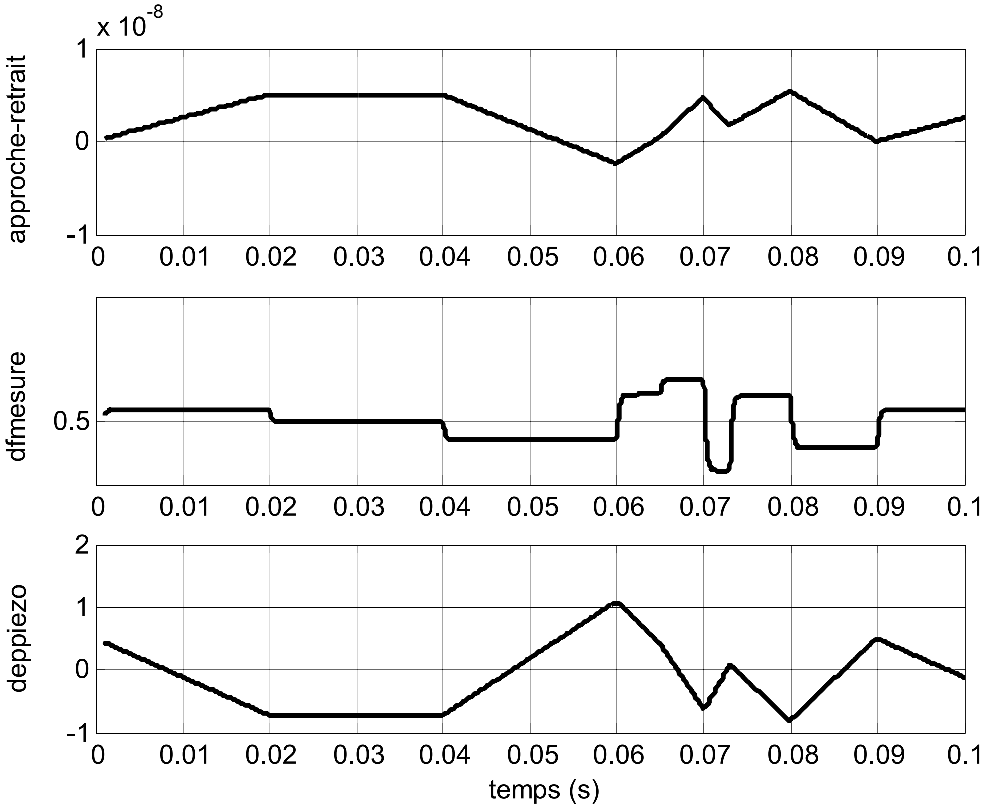
III.D.14 - ***Calculer*** *la variation finale de* $erreurdf$ *en réponse à un échelon d'amplitude 10 nm sur l'entrée* AR *.* On donne la réponse à un tel échelon page suivante.

III.D.15 - ***Déterminer*** *graphiquement le temps de réponse du système bouclé à un échelon sur l'entrée AR.* On donne la réponse à une entrée d'approche retrait dans le cas du correcteur PI page suivante.

III.D.16 - ***Expliquer*** *les variations de* $dfmesuré$ *constatées.* ***Proposer*** *une solution permettant d'améliorer le signal image du relief de l'échantillon* $deppiezo$ *sans modifier les éléments du système bouclé.* ***Proposer*** *l'ajout d'un élément dans la boucle afin d'obtenir* $deppiezo$ = - AR .

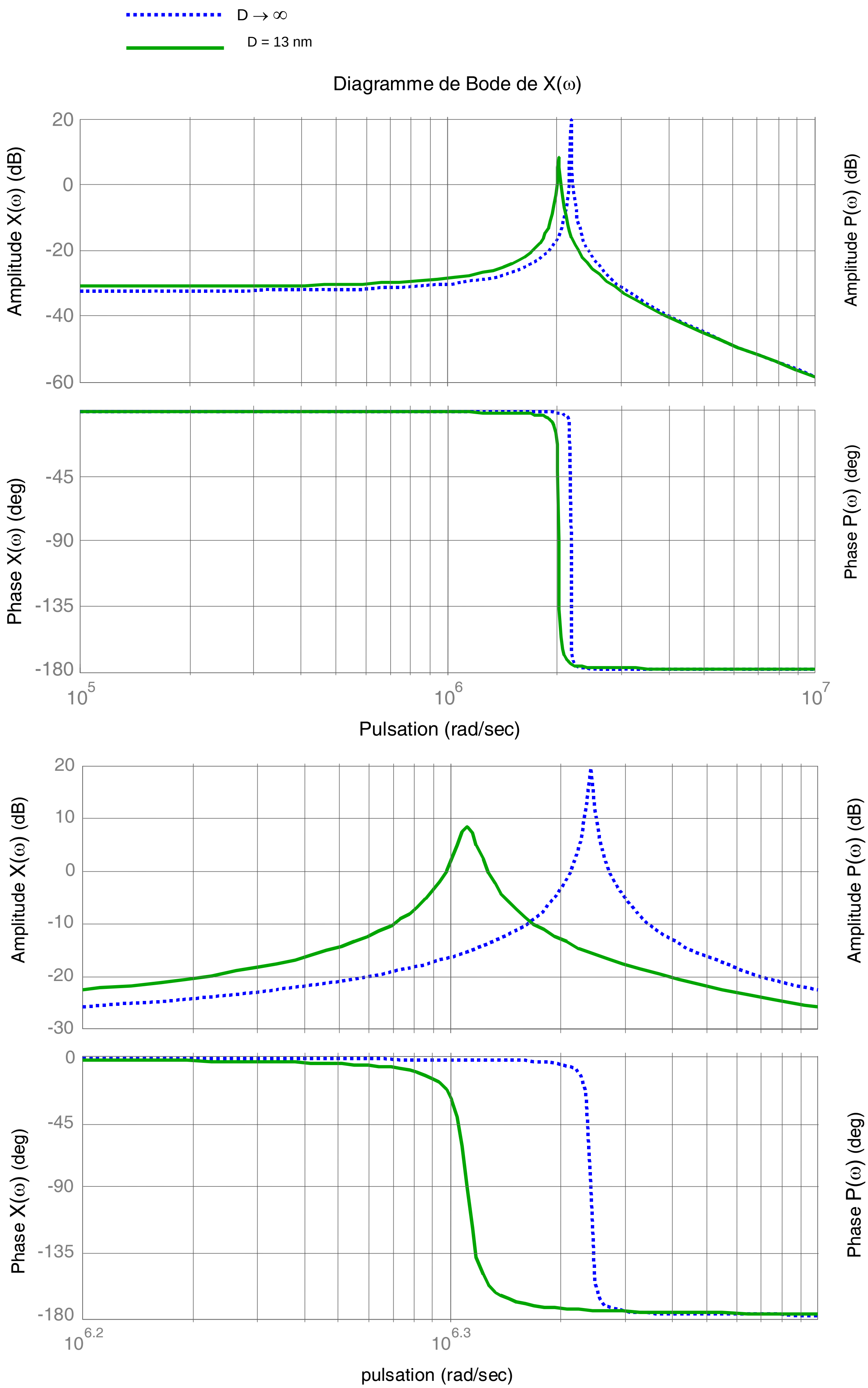


réponse à un échelon d'amplitude 10nm sur l'entrée AR

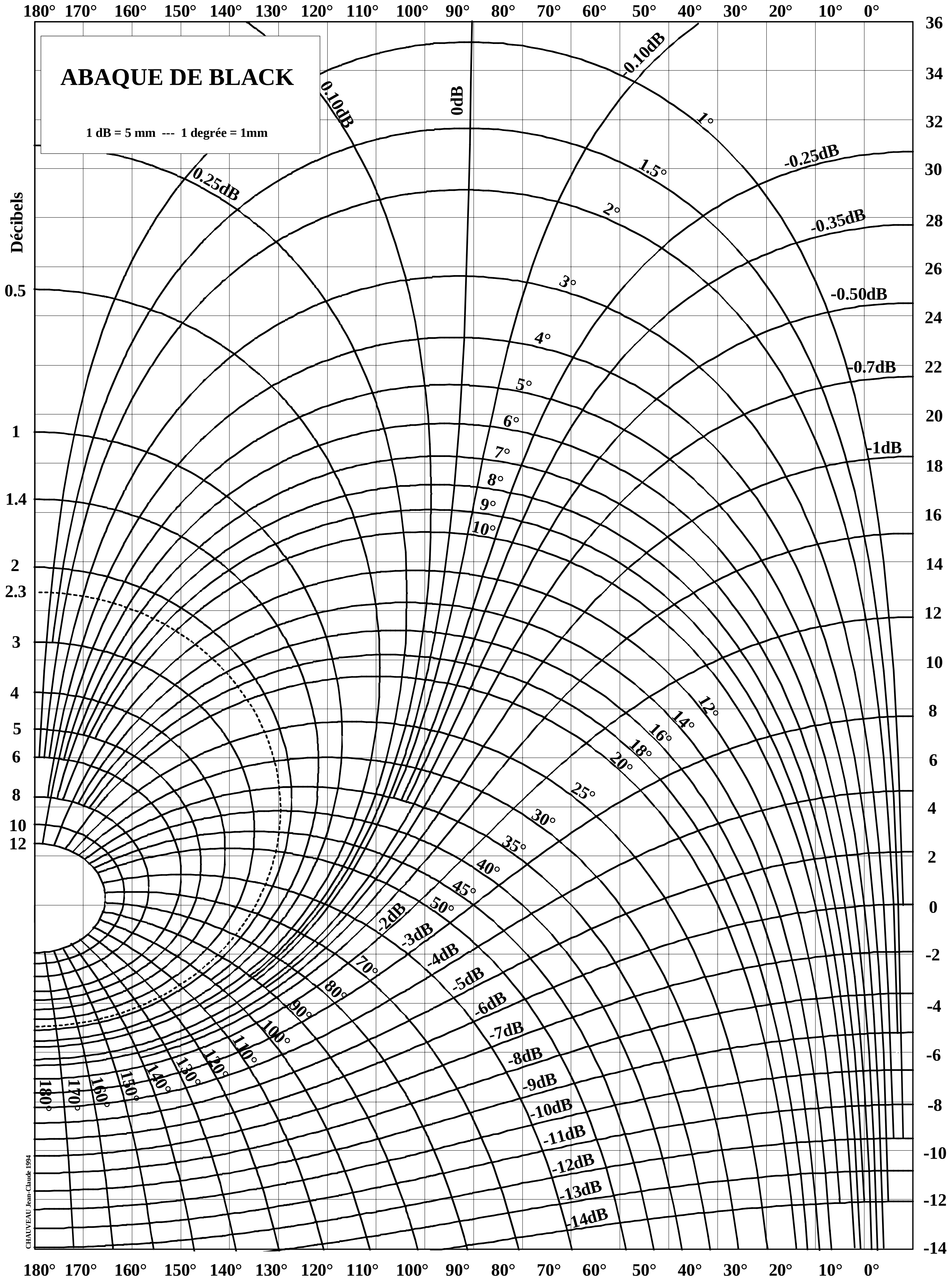


réponse à une entrée d'approche-retrait dans le cas du correcteur PI

DOCUMENT REPONSE 1



DOCUMENT REPONSE 2 et 3



(source : « Systèmes asservis linéaires » J-C et P CHAUVEAU – Ed. CASTEILLA)

DOCUMENT ANNEXE 1

TABLEAU DE QUELQUES TRANSFORMÉES USUELLES

f(t)	F(p)	f(t)	F(p)
$K.u(t)$	$\frac{K}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)}$
Kt	$\frac{K}{p^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{(p^2+\omega^2)}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$1-e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1+\frac{T_1.e^{-t/T_1}-T_2.e^{-t/T_2}}{T_2-T_1}$	$\frac{1}{p(T_1.p+1)(T_2.p+1)}$
$\frac{1}{T^n}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t/\tau}\quad n\geq 1$	$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m.\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}t+\Phi)$ avec $\Phi=\arccos(m)$	$\frac{\omega_0{}^2}{p(p^2+2.m.\omega_0.p+\omega_0{}^2)}$

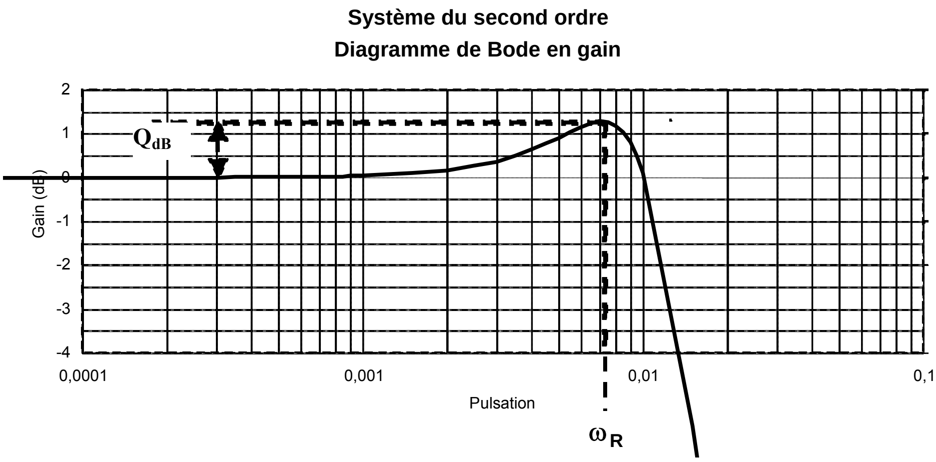
DOCUMENT ANNEXE 2

SYSTEME DU SECOND ORDRE

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2.m}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$$

m ..... coefficient d'amortissement
ω_0 .... pulsation propre non amortie

Réponse fréquentielle :



Q ..... facteur de résonance .... $Q = \frac{1}{2.m.\sqrt{1-m^2}}$

Q_{dB} .. facteur de résonance en dB...........Q_{dB} = 20.log Q

q ...... facteur de qualité .... $q = \frac{1}{2.m}$

ω_R....... pulsation de résonance.................. $\omega_R = \omega_0 . \sqrt{1-2.m^2}$

Réponse indicielle :

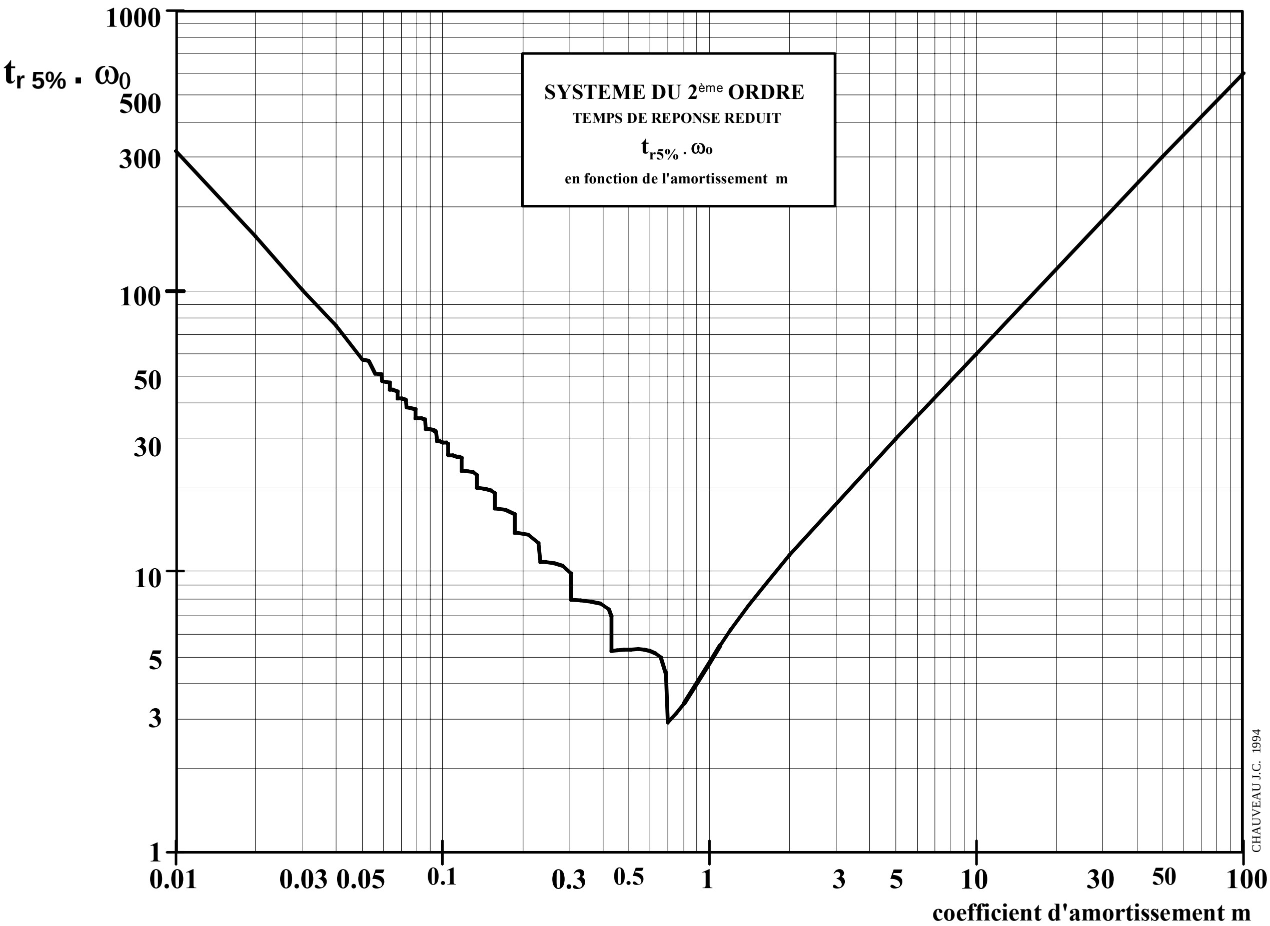
ω_P.... pseudo-pulsation .... $\omega_P = \omega_0 . \sqrt{1-m^2}$

$D_\%$ ... 1er dépassement .... $D_\% = 100 . e^{\frac{-\pi.m}{\sqrt{1-m^2}}}$

$t_{r\,5\%}$ .. temps de réponse à 5% (m < 0,7) .voir abaque temps de réponse réduit

DOCUMENT ANNEXE 3

ABAQUE du TEMPS de RÉPONSE RÉDUIT $t_{r\,5\%} \cdot \omega_0$



(source : « Systèmes asservis linéaires » J-C et P CHAUVEAU – Ed. CASTEILLA)

Corrigé de l'épreuve d'automatique option A

Partie 1 : Modélisation de la poutre cantilever

IA – Détermination de la fréquence d'oscillation du cantilever

IA1 – « M=Somme algébrique des moments des forces extérieures à un des côtés de la section x, par rapport à l'axe passant par cette section et perpendiculaire au plan de la figure »
On considère le poids $\vec{P}$ de la poutre. Le moment de $\vec{P}$ par rapport à l'axe est :

$$\boxed{M = -P(l-x)}$$

IA2 - On donne l'équation d'Euler-Bernoulli : $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = M$ avec $M = -P(l-x)$

On intègre cette équation deux fois :

$$EI\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}(0) = -Plx + P\frac{x^2}{2} \quad avec \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0$$

$$EIy - y(0) = -Pl\frac{x^2}{2} + P\frac{x^3}{6} \quad \text{avec} \quad y(0) = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } y = \frac{Px^2}{2EI}\left(\frac{x}{3} - l\right)}$$

IA3 – La déflexion est maximale à l'extrémité de la poutre soit pour x=l :

$$\delta = \frac{Pl^2}{2EI}\left(\frac{l}{3} - l\right)$$

$$\delta = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

IA4 – Expression de P en fonction de δ :

$$P = -\frac{3.E.I.\delta}{l^3}$$

Cette force est appliquée à l'extrémité de la poutre. Elle est de la forme $P = -k.\delta$ avec $k = \dfrac{3.E.I}{l^3}$. C'est l'expression du poids d'une masse placée à l'extrémité d'un ressort de raideur k lorsque celle-ci se trouve à l'équilibre avec δ : l'allongement du ressort .

$$\text{A.N. : } k = \frac{3 \times 1{,}69.10^{11} \times \dfrac{30.10^{-6} \times (4.10^{-6})^3}{12}}{(125.10^{-6})^3} = 41{,}53\ N/m$$

IA5 – La poutre est assimilée à une masse ponctuelle placée en son centre de gravité. $\frac{\delta}{2}$, $\frac{\dot{\delta}}{2}$ et $\frac{\ddot{\delta}}{2}$ sont respectivement la déflexion, la vitesse et l'accélération du centre de gravité de la poutre. L'énergie cinétique E_c s'écrit donc :

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{\delta}}{2} \right)^2$$

IA6 – La variation d'énergie potentielle est :

$$E_{p1} = mg \frac{\delta}{2}$$

IA7 – L'énergie emmagasinée par le ressort équivalent est :

$$E_{p2} = \frac{1}{2} k \delta^2$$

IA8 – Pour une déflexion maximale δ =30 nm, on peut calculer E_{p1} et E_{p2} :

$$E_{p1} = mg \frac{\delta}{2} = lhb\rho g \frac{\delta}{2}$$

A.N. : $E_{p1} = 125.10^{-6} \times 4.10^{-6} \times 30.10^{-6} \times 2330 \times \frac{30.10^{-9}}{2} = 5{,}14.10^{-18}\, Joules$

$$E_{p2} = \frac{1}{2} k \delta^2$$

A.N. : $E_{p2} = \frac{1}{2} \times 41{,}53 \times \left(30.10^{-9}\right)^2 = 1{,}87.10^{-14}\, Joules$

Conclusion : E_{p1} est négligeable devant E_{p2}

IA9 – Energie mécanique = Energie cinétique + Energie potentielle
Avec Energie potentielle = $E_{p1} + E_{p2} \approx E_{p2}$

Expression de l'Energie mécanique du cantilever : $E \approx E_c + E_{p2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{\delta}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} k \delta^2$

L'Energie mécanique est conservée au cours du mouvement donc :

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{\delta}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} k \delta^2 = cste$$

En dérivant l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{\delta}\frac{\ddot{\delta}}{4} + k\delta\dot{\delta} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{4}\ddot{\delta} + k\delta = 0$$

Donc l'équation du mouvement de l'extrémité du ressort est : $\frac{m}{4}\ddot{\delta} + k\delta = 0$

IA10 – En identifiant, on obtient :

$$m_r = \frac{m}{4} = \frac{lbh\rho}{4}$$

A.N. : $m_r = \frac{125.10^{-6} \times 30.10^{-6} \times 4.10^{-6} \times 2330}{4} = 8,74.10^{-12}\,kg$

$$k_r = k = \frac{Eb}{4}\left(\frac{h}{l}\right)^3$$

A.N. : $k_r = 41,53\,N/m$

IA11 – La fréquence d'oscillation f du ressort est donnée par :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_r}{m_r}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

A.N. : $f = 347\,kHz$

IB – Détermination de la fonction de transfert du cantilever

IB1 – Calcul de $\Phi(l)$ et $\Phi'(l)$:

$\Phi(x) = \cos(kx) - \cosh(kx) - \frac{\cos(kl) + \cosh(kl)}{\sinh(kl) + \sin(kl)}(\sin(kx) - \sinh(kx))$ avec $kl = 1,875$.

$\Phi(l) = \cos(kl) - \cosh(kl) - \frac{\cos(kl) + \cosh(kl)}{\sinh(kl) + \sin(kl)}(\sin(kl) - \sinh(kl))$ avec $kl = 1,875$.

A.N : $\Phi(l) = -1,999847$.

$\Phi'(x) = k\left[-\sin(kx) - \sinh(kx) - \frac{\cos(kl) + \cosh(kl)}{\sinh(kl) + \sin(kl)}(\cos(kx) - \cosh(kx))\right]$ avec $kl = 1,875$.

$\Phi'(l) = k\left[-\sin(kl) - \sinh(kl) - \frac{\cos(kl) + \cosh(kl)}{\sinh(kl) + \sin(kl)}(\cos(kl) - \cosh(kl))\right]$ avec $kl = 1,875$ et

donc $k = \frac{1,875}{l} = \frac{1,875}{125.10^{-6}} = 15000$

A.N. : $\Phi'(l) = -22022,865$

On en déduit Γ :

$$\Gamma = \frac{d_{31} lhE\Phi'(l)}{2}$$

A.N : $\Gamma = \frac{100.10^{-12} \times 125.10^{-6} \times 4.10^{-6} \times 1,69.10^{11} \times (-22022,865)}{2} = -9,3.10^{-5}$

IB2 - $\dfrac{\overline{V_C}(p)}{\overline{V}(p)}$:

D'après le schéma équivalent, $\Gamma v = L\dfrac{di}{dt} + v_c(t) + Ri$ avec $i = C\dfrac{dv_c(t)}{dt}$

Donc $\Gamma v = LC\dfrac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + v_c(t) + RC\dfrac{dv_c(t)}{dt}$

Transformée de Laplace : $\Gamma\overline{V}(p) = LCp^2\overline{V_C}(p) + \overline{V_C}(p) + RCp\overline{V_C}(p)$

D'où $\dfrac{\overline{V_C}(p)}{\overline{V}(p)} = \dfrac{\Gamma}{1 + RCp + LCp^2}$

IB3 - $\dfrac{\overline{\Delta}(p)}{\overline{V}(p)}$:

D'après le schéma équivalent : $i(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt} = \dfrac{1}{\Phi(l)}\dfrac{d\delta(t)}{dt}$

Transformée de Laplace : $Cp\overline{V_C}(p) = \dfrac{1}{\Phi(l)}p\overline{\Delta}(p)$ d'où $\dfrac{\overline{\Delta}(p)}{\overline{V_C}(p)} = C\Phi(l)$

Donc $\dfrac{\overline{\Delta}(p)}{\overline{V}(p)} = \dfrac{\overline{\Delta}(p)}{\overline{V_C}(p)} \times \dfrac{\overline{V_C}(p)}{\overline{V}(p)} = C\Phi(l) \times \dfrac{\Gamma}{1 + RCp + LCp^2}$

IB4 -

Calcul de a en régime permanent tel que $\delta = a.d_{31}\left(\dfrac{2l}{h}\right)^2 v$

Réponse à un échelon de tension v.u(t), d'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty}\delta(t) = \lim_{p\to 0} p\Delta(p) = \lim_{p\to 0} pC\Phi(l) \times \frac{\Gamma}{1 + RCp + LCp^2}\frac{v}{p} = C\Phi(l)\Gamma v$$

En identifiant, on obtient : $C\Phi(l)\Gamma = a.d_{31}\left(\dfrac{2l}{h}\right)^2$ donc $a = \dfrac{C\Phi(l)\Gamma}{d_{31}\left(\dfrac{2l}{h}\right)^2}$

A.N. : $a = \dfrac{C \times (-1{,}999847) \times (-9{,}3.10^{-5})}{100.10^{-12} \times \left(\dfrac{2 \times 125.10^{-6}}{4.10^{-6}}\right)^2} = 476 \times C$

La valeur de C n'était pas donnée. L'expression de a suffisait pour obtenir la note maximale.

IB5 –

$$\delta = a.d_{31}\left(\frac{2l}{h}\right)^2 v = \frac{\frac{d_{31}bh}{2E}l^2}{2IE}v = \frac{d_{31}bhl^2}{4IE^2}v = \frac{d_{31}bhl^2}{4\frac{bh^3}{12}E^2}v = 12\frac{d_{31}l^2}{4h^2E^2}v = \frac{3}{4E^2}.d_{31}\left(\frac{2l}{h}\right)^2 v$$

$$a = \frac{3}{4E^2}$$

A.N. : $a = \frac{3}{4\times(1,69.10^{11})^2} = 2,626.10^{-23}$

Comparaison impossible, car la valeur de C n'était pas donnée. Cette réponse a obtenu le maximum de points. On pouvait supposer qu'une erreur d'énoncé était intervenue car la valeur de a donnée par la suite était 0,75.

IB6 –

D'après l'annexe 2 : $q = \frac{1}{2\xi} = 400$ donc $\xi = \frac{1}{2q}$ donc $\xi = 1,25.10^{-3}$

D'autre part, $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ avec $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

donc $\omega_r \approx \omega_n$

$$R = 2\xi\sqrt{\frac{L}{C}}$$

L'application numérique était impossible car les valeurs de L et C n'étaient pas données. Cette réponse a obtenu le maximum de points.

IC – Evaluation de l'influence des forces de Van der Waals

IC1 – On applique une tension $v = 0,1V$

Amplitude de la déflexion du microlevier : $v\times 0,75.d_{31}\left(\frac{2l}{h}\right)^2$ =29nm

IC2 – Calculer la variation de la déflexion δ :

Lorsque l'on tient compte des forces de Van der Waals, la force F_{TIP} est appliquée à l'extrémité du micro levier. Cela revient à ce que la tension v soit une tension : $v - \frac{\Phi(l)}{\Gamma}.F_{TIP}$

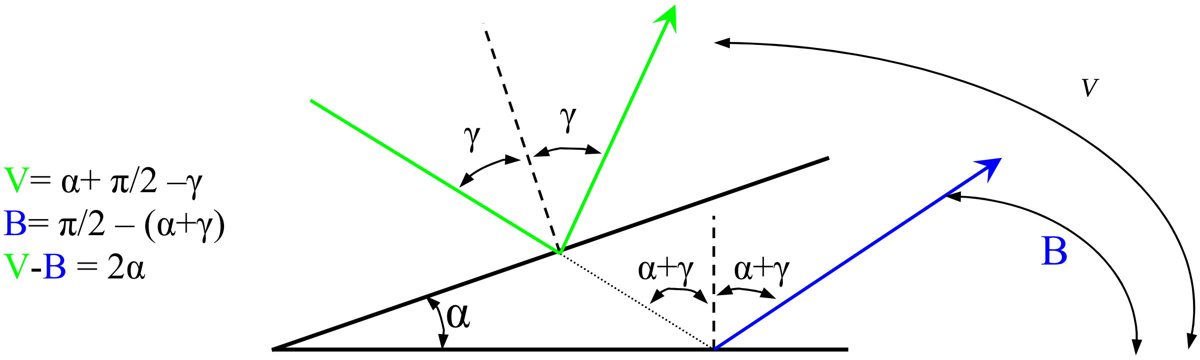
A.N. : $v = 0,1 - \frac{-1,999847}{-9,3.10^{-5}}10^{-9} = 0,999785$

Donc la variation de v est de $\frac{1,999847}{9,3.10^{-5}}10^{-9} = 2,15.10^{-5}$ Volts donc la variation de la déflexion est de $v\times 0,75.d_{31}\left(\frac{2l}{h}\right)^2$ soit 6,3pm.

L’influence des forces de Van der Waals sur l’amplitude des oscillations du micro levier est minime à une distance de 2nm.

ID – Etude du capteur à photodiodes

ID1 – Calcul de β :



$\beta = 2\alpha$

α étant petit $\sin\alpha \approx \alpha$ et $\sin\alpha = \dfrac{\delta}{l}$

$D = L_1\beta = L_1 2\alpha = L_1 2\dfrac{\delta}{l}$

ID2 – L'équation montre que le déplacement du faisceau D sur le photodétecteur est $2L_1$ /l fois plus grand environ que le déplacement δ du microlevier.

$D = L_1 2\dfrac{\delta}{l} = k.\delta$ d’où $k = \dfrac{2L_1}{l}$

A.N. : $k = \dfrac{2\times 2.10^{-2}}{125.10^{-6}} = 320$

ID3 – L’augmentation de surface sur le secteur B est de $2rD$.

Le courant I_B augmente de la quantité :

$\dfrac{2I_0}{\pi r^2}2rD = \dfrac{4I_0D}{\pi r}$

ID4 - La variation ΔI de courant entre les deux secteurs est donc :

$\Delta I = 2\times\dfrac{4I_0D}{\pi r} \approx \dfrac{16I_0}{\pi r}\dfrac{L_1}{l}\delta$

A.N. : $\Delta I = \dfrac{16\times 2,5.10^{-6}}{\pi\times 1,5.10^{-3}}\times\dfrac{2.10^{-2}}{125.10^{-6}}\times 30.10^{-9} = 4,07.10^{-8}\,A \approx 40nA$

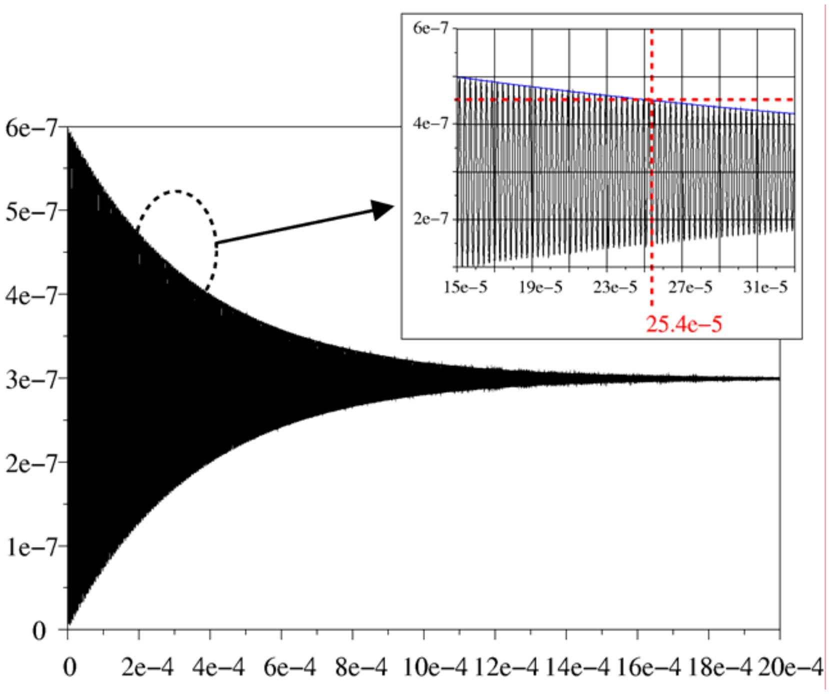
IE – Partie pédagogique relative aux photodétecteurs.

Partie 2 : Oscillations entretenues du cantilever

II1 – On donne la fonction de transfert du cantilever.

D'après l'annexe 1, la réponse à un échelon est de la forme :

$$A_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t+Arc\cos(\xi))\right)$$



ξ étant très inférieur à 1, on peut considérer que l'amplitude des oscillations diminue de 50% lorsque l'enveloppe diminue de 50% quand $e^{-\xi\omega_0 t} = 0{,}5$

A.N. : $t = \dfrac{\ln 2}{\xi\omega_0} = 0{,}254ms$

II2 – Expression de ω_{0a} :

$$\omega_{0a} = \sqrt{\frac{k_a}{m}}$$

II3 – Condition d'oscillation du système bouclé (Barkhausen) :

$$X(\omega)A(\omega) = 1 \text{ avec } A(\omega) = Gk_1k_2D_{amp}A_0G_{li}e^{j\varphi(\omega)}$$

II4 – Equation relative à l'argument des deux membres de l'équation précédente :

$$Arg(X(\omega)) + Arg(A(\omega)) = Arg(1)$$

$$\Leftrightarrow -arctg\left(\frac{2\lambda_a\omega_{0a}\omega}{-\omega^2+\omega_{0a}{}^2}\right)+\varphi(\omega)=0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \varphi(\omega)=arctg\left(\frac{2\lambda_a\omega_{0a}\omega}{-\omega^2+\omega_{0a}{}^2}\right)}$$

II5 – On donne $k_1 = 1,26.10^{-5}$ N/V.

Donc $k_1 X(\omega)=\dfrac{\overline{\Delta}(p)}{\overline{V}(p)}$

$$\Leftrightarrow \frac{k_1}{-m\omega^2+j2\lambda_0 m\omega_{0a}\omega+k_0}=\frac{A_0}{1+\dfrac{2\xi p}{\omega_0}+\dfrac{p^2}{\omega_0{}^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k_1/k_0}{-\dfrac{m}{k_0}\omega^2+\dfrac{j2\lambda_0 m\omega_{0a}}{k_0}\omega+1}=\frac{A_0}{1+\dfrac{2\xi p}{\omega_0}+\dfrac{p^2}{\omega_0{}^2}}$$

Par identification, on obtient :

$$\lambda_0=\xi=1,25.10^{-3}$$
$$k_0=\frac{k_1}{A_0}=42\,\text{N/m}$$
$$m=\frac{k_0}{\omega_0{}^2}=\frac{k_1}{A_0\omega_0{}^2}=8,84.10^{-12}\,\text{kg}$$

II7 – D'après la question II4,

Pour $\omega=\omega_0=\omega_{0a}=\omega_{osc}$, $Arg(X(\omega))+Arg(A(\omega))=0$

$$\varphi(\omega=\omega_0)=-Arg(X(\omega=\omega_0))$$

$$\boxed{\varphi(\omega=\omega_0)=\frac{\pi}{2}}$$

II8 – $X(\omega)=\dfrac{1}{-m\omega^2+j2\lambda_a m\omega_{0a}\omega+k_a}$

$$\Leftrightarrow X(p)=\frac{1}{mp^2+2\lambda_a m\omega_{0a}p+k_a}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\frac{\dfrac{1}{p}}{mp+2\lambda_a m\omega_{0a}+\dfrac{k_a}{p}}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \frac{\dfrac{1}{2\lambda_a m\omega_{0a} p}}{\dfrac{p}{2\lambda_a\omega_{0a}} + 1 + \dfrac{k_a}{2\lambda_a m\omega_{0a} p}} \text{ avec } \omega_{0a} = \sqrt{\frac{k_a}{m}}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \frac{\dfrac{\omega_{0a}}{2\lambda_a m\omega_{0a}{}^2 p}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_a}\left(\dfrac{p}{\omega_{0a}} + \dfrac{k_a}{m\omega_{0a} p}\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \frac{\dfrac{1}{2\lambda_a m\omega_{0a} p}}{1 + \dfrac{1}{2\lambda_a}\left(\dfrac{p}{\omega_{0a}} + \dfrac{\omega_{0a}}{p}\right)}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{1}{2\lambda_a m\omega_{0a}{}^2} \\ \omega_0 = \omega_{0a} \\ Q = \dfrac{1}{2\lambda_a} \end{cases}$$

II9 – Argument de $X(\omega)$:

$$\Phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{2Q\delta\omega}{\omega_0}\right) \text{ avec } \delta\omega = \omega - \omega_0$$

$$\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{2Q}{\omega_0}\frac{1}{1 + \left(\dfrac{2Q(\omega - \omega_0)}{\omega_0}\right)^2}$$

Pente de $\Phi(\omega)$: $\lim\limits_{\omega\to\omega_0} \dfrac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = -\dfrac{2Q}{\omega_0}$

La pente de $\Phi(\omega)$ est proportionnelle à Q. La fréquence d'oscillation de la boucle est stable et très proche de la fréquence propre du micro levier.

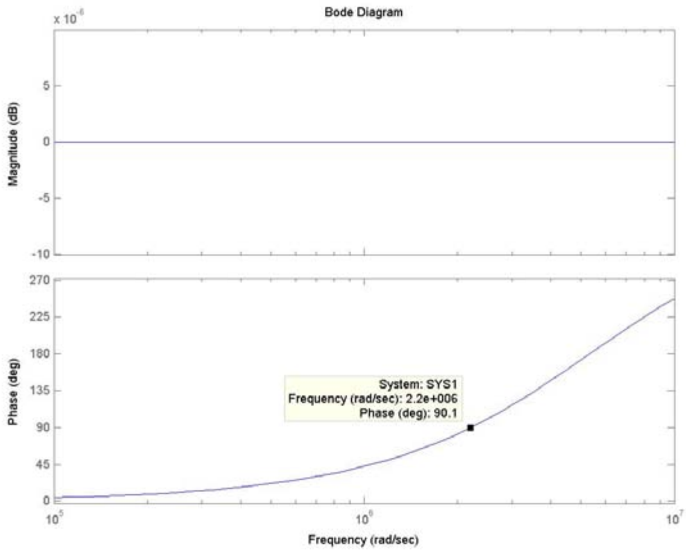
II10 – Déphaseur : $D(p) = \dfrac{Tp+1}{-Tp+1}.\dfrac{Tp+1}{-Tp+1}$

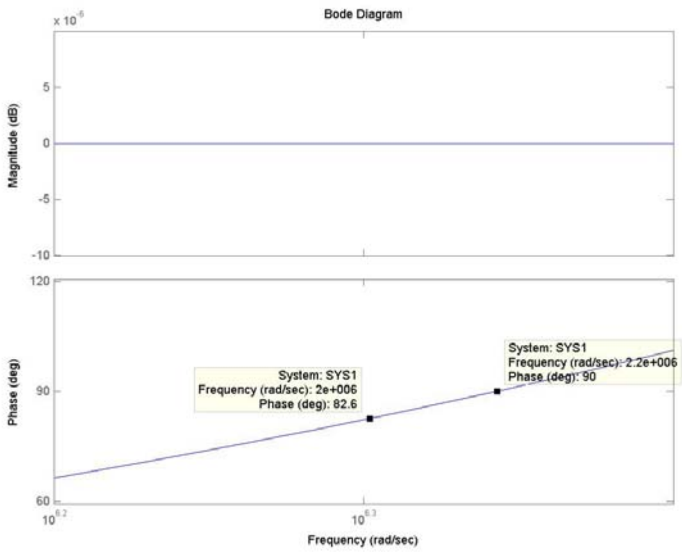
$$Arg(D(p)) = 4.arctg\left(T\omega_0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Graphiquement : $\omega_0 = 2,2.10^6\, rad.s^{-1}$

$$T = \frac{\tan\frac{90}{4}}{\omega_0} = 1,88.10^{-7}\,s$$

II11 – Diagramme de Bode des deux cellules en cascade :





II12 – Pulsation propre du micro levier pour D = 13nm, d'après le document réponse 1 :
$\omega_{0a} \approx 2.10^6$rad/s

II13 – Pulsation d'oscillation ω_{osc} de la boucle : lorsque $Arg(X(\omega_{osc})) = -\varphi(\omega_{osc})$

Graphiquement : $\omega_{osc} \approx \omega_{0a} = 2.10^6$rad/s

$\varphi(\omega_{osc}) = 4arctg(T\omega_{osc}) = 82,4°$

Conclusion : Le facteur de résonance Q étant grand, la fréquence de résonance de la boucle = la fréquence propre du microlevier.

II14 – On suppose $\omega_{osc} = \omega_{0a}$

Condition d'oscillation du système bouclé (Barkhausen) (vu à la question II3) :

$$X(\omega)A(\omega) = 1 \text{ avec } A(\omega) = Gk_1k_2D_{amp}A_0G_{li}e^{j\varphi(\omega)}$$

Equation relative au module des deux membres de l'équation précédente :

$$\|X(\omega_{osc})\|.\|A(\omega_{osc})\| = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\lambda_a m\omega_{0a}{}^2}.GDampk_1k_2G_{li}A_0 = 1$$

$$\boxed{\text{donc } Damp = \frac{2\lambda_a m\omega_{0a}{}^2}{Gk_1k_2G_{li}A_0}}$$

II15 – Amplitude X_m des oscillations :

- Pour $I = 0$ et $P \neq 0$: $Damp = P\left(-X_m k_2 G_{li} A_0 G_{pd} + U_0\right)$ avec $Damp = \dfrac{2\lambda_a m\omega_{0a}{}^2}{Gk_1k_2G_{li}A_0}$

  D'où $X_m = \left(-\dfrac{Damp}{P} + U_0\right).\dfrac{1}{k_2G_{li}A_0G_{pd}}$
- Pour $I \neq 0$ et $P \neq 0$: $X_m = \dfrac{U_0}{k_2G_{li}A_0G_{pd}}$

II16 – Intérêt d'un correcteur PI :

Pour $I = 0$ et $P \neq 0$: $X_m = \left(-\dfrac{Damp}{P} + U_0\right).\dfrac{1}{k_2G_{li}A_0G_{pd}}$ avec $Damp = \dfrac{2\lambda_a m\omega_{0a}{}^2}{Gk_1k_2G_{li}A_0}$. Donc l'amplitude des oscillations dépend du coefficient λ_a : paramètre caractéristique du micro levier et qui évolue en fonction de la distance pointe-surface. Avant de démoduler ce signal, il est nécessaire d'effectuer un traitement permettant d'obtenir une amplitude constante.

Pour $I \neq 0$ et $P \neq 0$: X_m ne dépend pas des caractéristiques du micro levier mais uniquement des éléments de réglage du système bouclé. Le démodulateur de fréquence a un signal d'entrée d'amplitude constante.

II17 – Démodulation d'amplitude :

Fonction réalisée par le module encadré :

$$e'(t) = e(t)^2 = E^2.\left(\cos\left(2\pi ft\right)\right)^2 = \frac{E^2}{2}.(1 + \cos(4\pi ft))$$

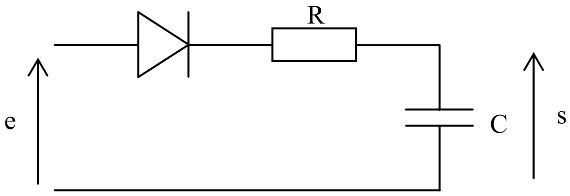
Après filtrage avec une fréquence de coupure de $f_C = \dfrac{1}{2\pi.420.10^{-6}} = 379Hz$, la composante en $2f = 660kHz$ est donc supprimée.

$$e''(t) = \frac{E^2}{2}$$

$$e'''(t) = \sqrt{\frac{E^2}{2}}$$

$$s(t) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{E^2}{2}} = E$$

II18 – Détecteur à diodes :



avec $\frac{1}{2\pi RC} \ll 2f$

Différences entre le modèle et le circuit réel :

- La tension de seuil de la diode n'est pas prise en compte dans le modèle
- Les temps de montée et de descente sont identiques dans le modèle alors que la montée est plus rapide que la descente pour le détecteur crête.

Partie 3 : Traitement du signal issu du capteur à photodiodes

IIIA – Modélisation du cantilever

IIIA1 – Equation différentielle :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda_0 m\omega_0 \frac{dx}{dt} + k_0 x = f_b + \frac{HR}{6(D-x)^2} \quad \text{avec } x \ll D$$

Or $\frac{HR}{6(D-x)^2} = \frac{HR}{6D^2\left(1-\frac{x}{D}\right)^2}$

Développement limité :

$$\frac{HR}{6D^2\left(1-\frac{x}{D}\right)^2} = \frac{HR}{6D^2}\left[1+2\frac{x}{D}\right]$$

L'équation devient : $m\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda_0 m\omega_0 \frac{dx}{dt} + k_0 x - \frac{HR}{6D^2}\frac{2x}{D} = f_b + \frac{HR}{6D^2}$

En identifiant, on obtient :

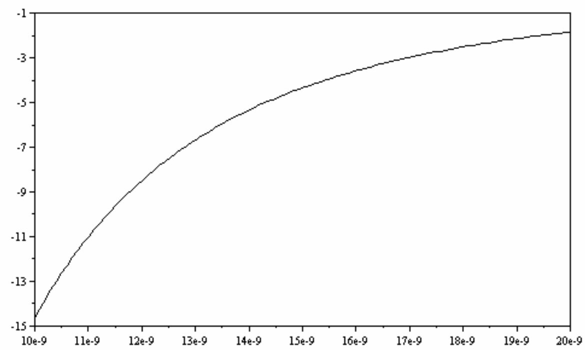
$$\begin{cases} a = m \\ b = 2\lambda_0 m\omega_0 \\ c(D) = k_0 - \dfrac{HR}{3D^3} \\ d(D) = \dfrac{HR}{6D^2} \end{cases}$$

IIIA2 – Fréquence propre du cantilever :

$$\boxed{f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c(D)}{a}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_0 - 2\dfrac{HR}{6D^3}}{m}}}$$

IIIA3 – Variation de fréquence : $\Delta f = \dfrac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\dfrac{k_0 - 2\dfrac{HR}{6D^3}}{m}} - \sqrt{\dfrac{k_0}{m}}\right)$

Environ 14,6Hz d'après la courbe :



IIIA4 – Linéarisation autour de D = 13nm :

$$\Delta f + 1,063 = k(D - 13.10^{-9})$$

$$\Delta f\,'(D) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\frac{2HR\times 3}{6mD^4}\left(\frac{k_0 - 2\dfrac{HR}{6D^3}}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{A.N. : } \Delta f\,'(13nm) = k = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\frac{2\times 3,333.10^{-28}\times 3}{12,9.10^{-12}\times(13.10^{-9})^4}\left(\frac{40 - 2\dfrac{3,333.10^{-28}}{(13.10^{-9})^3}}{12,9.10^{-12}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 245,28.10^6}$$

IIIB – Démodulation de fréquence

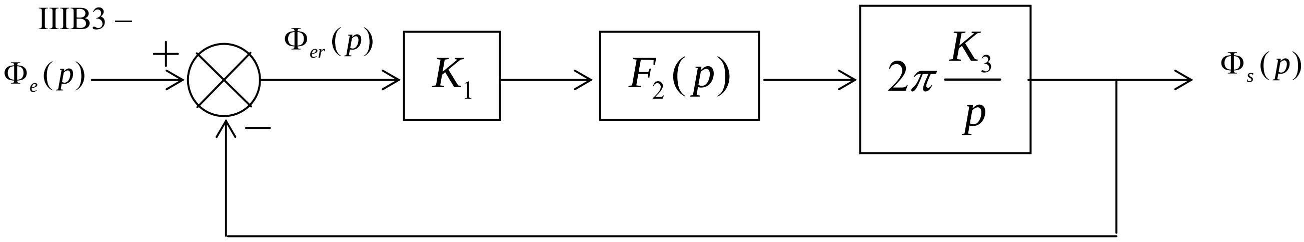
IIIB1 -

$$\boxed{f_0 = f_c = 300 kHz}$$

IIIB2 -

$$\boxed{\delta f(t) = K_3 . u(t)}$$

IIIB3 –



$$G(p) = \frac{\Phi_{er}(p)}{\Phi_e(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi K_1 K_3 F_2(p)}{p}}$$

IIIB4 – $F_2(p) = 1$

Réponse à un échelon de phase : $\Phi_e(p) = \frac{\Delta\Phi}{p}$

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_{er}(t) = \lim_{p\to 0} p\Phi_{er}(p) = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{1 + \frac{2\pi K_1 K_3}{p}} \frac{\Delta\Phi}{p} = 0$$

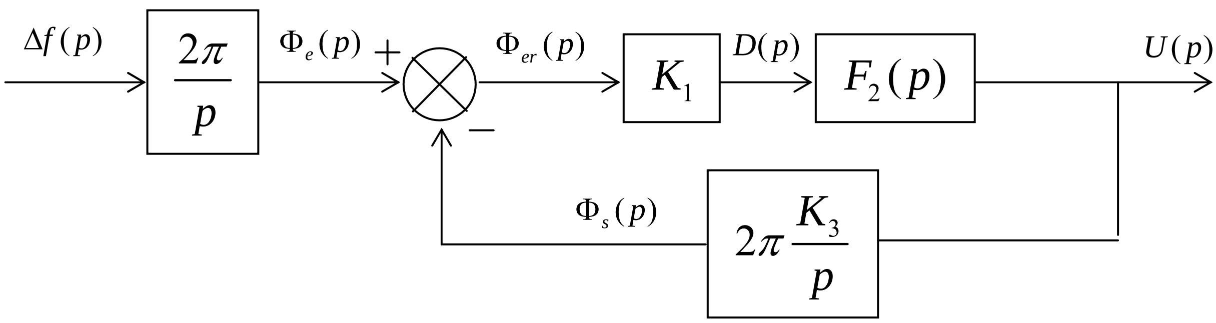
Réponse à un échelon de fréquence : $\Phi_e(p) = \frac{\Delta\omega}{p^2}$

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_{er}(t) = \lim_{p\to 0} p\Phi_{er}(p) = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{1 + \frac{2\pi K_1 K_3}{p}} \frac{\Delta\omega}{p^2} = \frac{\Delta\omega}{2\pi K_1 K_3}$$

L'échelon de phase correspond à un relief de type « rampe »
L'échelon de fréquence correspond à un relief de type « marche »

Pour minimiser l'erreur de phase, il faut choisir un gain de boucle très grand.

IIIB5 –



IIIB6 –

$$T(p)=\frac{U(p)}{\Delta f(p)}=\frac{\frac{2\pi}{p}K_1F_2(p)}{1+\frac{2\pi}{p}K_1K_3F_2(p)}$$

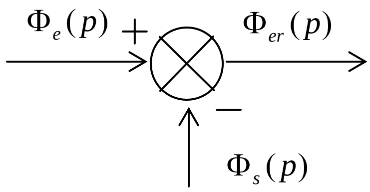
IIIB7 –

Pour $F_2(p)=1, T(p)=\dfrac{\frac{2\pi}{p}K_1}{1+\frac{2\pi}{p}K_1K_3}=\dfrac{1}{K_3}.\dfrac{1}{1+\frac{p}{2\pi K_1K_3}}$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} T_0=\dfrac{1}{K_3} \\ a=\dfrac{1}{2\pi K_1K_3} \end{cases}$$

IIIB8 – Nécessité d'un filtre passe-bas $F_2(p)$.



$e(t)=E_0\cos(\varphi_e(t))$
$s(t)=S_0\cos(\varphi_s(t))$

$$e(t).s(t)=E_0\cos(\varphi_e(t)).S_0\cos(\varphi_s(t))=\frac{E_0S_0}{2}\left[\cos\left(\varphi_e(t)+\varphi_s(t)\right)+\cos\left(\varphi_e(t)-\varphi_s(t)\right)\right]$$

Le filtre passe-bas $F_2(p)$ permet d'éliminer la composante en $\cos\left(\varphi_e(t)+\varphi_s(t)\right)$ pour ne conserver, à la sortie du comparateur, que la composante en $\cos\left(\varphi_e(t)-\varphi_s(t)\right)$.

IIIB9 –

$$\boxed{F_2(p)=\frac{1}{1+RCp}}$$

IIIB10 –

$$\boxed{G(p)=\frac{\Phi_{er}(p)}{\Phi_e(p)}=\frac{1}{1+\frac{2\pi K_1K_3F_2(p)}{p}}=\frac{p}{p+\frac{2\pi K_1K_3}{1+RCp}}}$$

IIIB11 –

Réponse à un échelon de phase : $\Phi_e(p)=\dfrac{\Delta\Phi}{p}$

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_{er}(t)=\lim_{p\to 0}p\Phi_{er}(p)=\lim_{p\to 0}p\frac{p}{p+\frac{2\pi K_1K_3}{1+RCp}}\frac{\Delta\Phi}{p}=0$$

Réponse à un échelon de fréquence : $\Phi_e(p) = \frac{\Delta\omega}{p^2}$

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_{er}(t) = \lim_{p\to 0} p\Phi_{er}(p) = \lim_{p\to 0} p \frac{p}{p + \frac{2\pi K_1 K_3}{1+RCp}} \frac{\Delta\omega}{p^2} = \frac{\Delta\omega}{2\pi K_1 K_3}$$

IIIB12 – Il existe une valeur max de $\Delta\omega$ pour laquelle la PLL reste accrochée.
$\cos\left(\varphi_{er}(t)\right) < 1$

Donc il faut que $\varphi_{er}(t) < \frac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{\frac{\Delta\omega}{2\pi K_1 K_3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta\omega < \pi^2 K_1 K_3}$

IIIB13 – $T(p) = \frac{U(p)}{\Delta f(p)} = \frac{\frac{2\pi}{p} K_1 F_2(p)}{1 + \frac{2\pi}{p} K_1 K_3 F_2(p)}$

Pour $F_2(p) = \frac{1}{1+RCp}$, $T(p) = \frac{\frac{2\pi}{p\left(1+RCp\right)} K_1}{1 + \frac{2\pi}{p\left(1+RCp\right)} K_1 K_3} = \frac{1}{K_3} \frac{1}{1 + \frac{p}{2\pi K_1 K_3} + \frac{RCp^2}{2\pi K_1 K_3}}$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} T_0 = \frac{1}{K_3} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{2\pi K_1 K_3}{T}} \\ \frac{2m}{\omega_n} = \frac{1}{2\pi K_1 K_3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{2\pi T K_1 K_3}} \end{cases}$$

IIIB14 – On donne $\begin{cases} m = 0,707 \\ T = \frac{100}{2\omega_c} \end{cases}$

Calcul de T :

On sait (IIIB) que $f_c = 300kHz$ donc $\omega_c = 2.\pi.300.10^3 \, rad/s$

A.N. : $T = \frac{100}{2.2.\pi.300.10^3} = \frac{1}{12000\pi} = 26,5\mu s$

Calcul de ω_n :

D'aprèsIIIB13, $m = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2\pi T K_1 K_3}} \Leftrightarrow \sqrt{K_1 K_3} = \frac{1}{2m\sqrt{2\pi T}}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2\pi K_1 K_3}{T}} = \sqrt{\frac{2\pi}{T}}\frac{1}{2m\sqrt{2\pi T}} = \frac{1}{2mT}$$

A.N : $\omega_n = \dfrac{1}{2\times 0,707\times \dfrac{1}{12000\pi}} = 26661,3 rad.s^{-1}$

Calcul de K_3 : $\sqrt{K_1 K_3} = \frac{1}{2m\sqrt{2\pi T}} \Leftrightarrow K_3 = \frac{1}{8m^2 \pi T K_1}$

K_1 n'étant pas donné, sachant que le comparateur est un multiplieur dont la caractéristique est linéarisée autour de $\frac{\pi}{2}$,

si $K_1 = 1$, $K_3 = \frac{1}{8m^2\pi T}$

A.N. : $K_3 = \dfrac{1}{8\times 0,707^2\pi\dfrac{1}{12000\pi}} = \dfrac{12000}{8\times 0,707^2} = 3001 rad/s/V$

si $K_1 = \frac{2}{\pi}$, $K_3 = \frac{3001\pi}{2} = 4714 rad/s/V$

Temps de réponse de la boucle :

D'après l'annexe 3, pour $m = 0,707$, $t_r.\omega_n = 3 \Leftrightarrow t_r = \frac{3}{\omega_n}$

A.N. : $t_r = \frac{3}{26661,3} = 112,5\mu s$

Valeur max de $\Delta\omega$ calculée en IIIB12 – $\Delta\omega_{\max} = \pi^2 K_1 K_3 = \frac{\pi}{8m^2 T} = 29617,8 rad.s^{-1}$

D'où $\Delta f_{\max} = \frac{29617,8}{2\pi} = 4713 Hz$

IIIC – Travail pédagogique relatif à la PLL.

IIID – Régulation de la position du piézo-électrique.

IIID1 –

$$dfmesuré = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2m\frac{p}{\omega_n} + 1}\left(erreurdf - Kcantilever \times AR\right)$$

IIID2 – L'échantillon ne présente pas de relief, donc $AR = 0$.

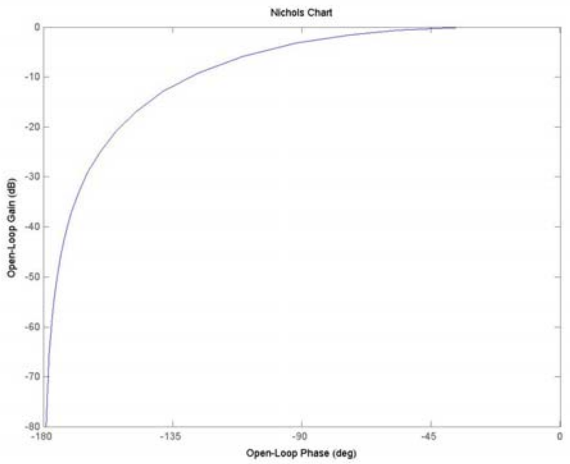
$$erreurdf = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n{}^2}+2m\frac{p}{\omega_n}+1}}dfconsigne$$

erreur statique : $\lim\limits_{t\to\infty} erreurdf = \lim\limits_{p\to 0} p\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n{}^2}+2m\frac{p}{\omega_n}+1}}\frac{0,5}{p} = 0,25Hz$

IIID3 - Variation de $erreurdf$ en réponse à un échelon d'amplitude 10nm sur l'entrée AR :

$$\Delta erreurdf = \lim_{p\to 0} p\frac{Kcantilever}{1+\frac{p^2}{\omega_n{}^2}+2m\frac{p}{\omega_n}+1}\frac{10.10^{-9}}{p} = 1,226Hz$$

IIID4 – Fonction de transfert en Boucle Ouverte : $\frac{dfmesuré}{dfconsigne} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n{}^2}+2m\frac{p}{\omega_n}+1}$



Correction proportionnelle

IIID5 – Graphiquement on trouve
$20\log K_p = 11,7dB$

$\Leftrightarrow K_p = 3,84$

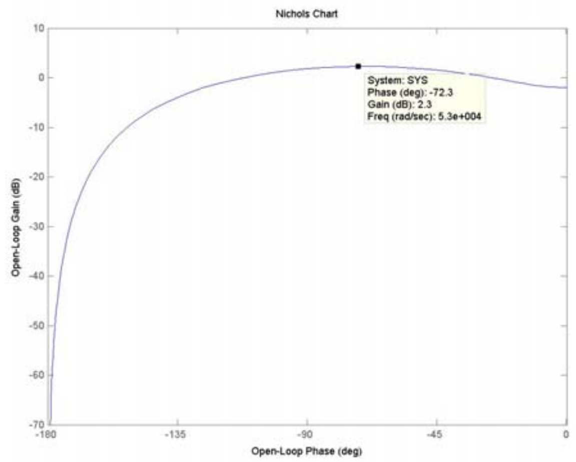
IIID6 – Fonction de transfert en Boucle Ouverte : $\frac{dfmesuré}{dfconsigne} = \frac{3,84}{\frac{p^2}{\omega_n{}^2}+2m\frac{p}{\omega_n}+1}$

IIID7 – erreur statique : $\lim\limits_{t\to\infty} erreurdf = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{1}{1+\dfrac{K_p}{\dfrac{p^2}{{\omega_n}^2}+2m\dfrac{p}{\omega_n}+1}} \dfrac{0,5}{p} = 0,1Hz$

IIID8 - Variation de $erreurdf$ en réponse à un échelon d'amplitude 10nm sur l'entrée AR :

$$\Delta erreurdf = \lim_{p\to 0} p \frac{K_p.Kcantilever}{K_p+\dfrac{p^2}{{\omega_n}^2}+2m\dfrac{p}{\omega_n}+1} \frac{10.10^{-9}}{p} = 1,95Hz$$

IIID9 – Fréquence de résonance du système en boucle fermée :
Résonance à 2,3dB pour $\omega_r \approx 2\omega_n \approx 53374,5 rad.s^{-1}$
Diagramme de Black en boucle fermée :



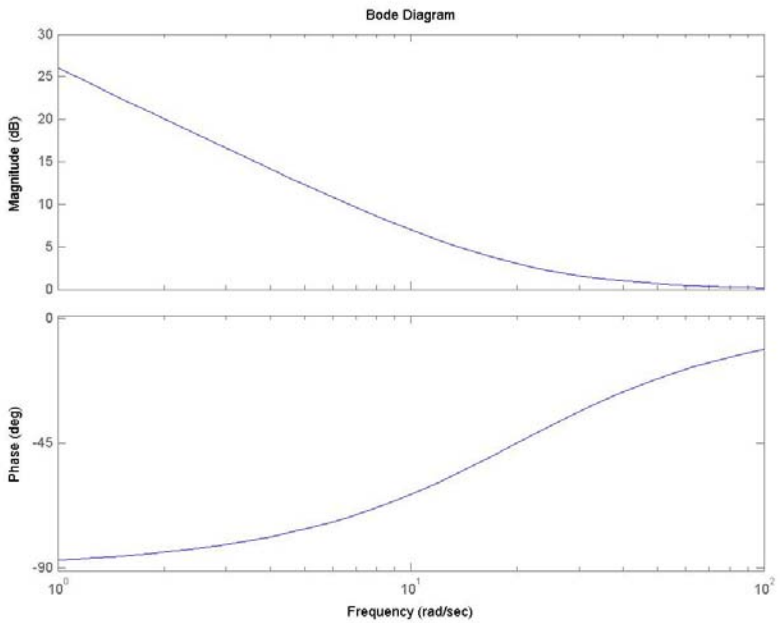
D'après l'annexe 2 : $Q = \dfrac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$ (équation à résoudre pour $20\log Q = 2,3dB$)
Coefficient d'amortissement m : $m = 0,424$
Temps de réponse du système bouclé :
D'après l'annexe 3, $t_r.\omega_0 \approx 5,2$ pour $m = 0,424$

D'après l'annexe 2 $\omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.m^2}$, donc $\omega_0 = \dfrac{\omega_r}{\sqrt{1-2.m^2}} = 66694,8 rad.s^{-1}$

D'où $t_r = \dfrac{5,2}{\omega_0} \approx 78\mu s$

Correction Proportionnelle Intégrale

IIID10 – Diagramme de Bode : (en déduire l'asymptotique)



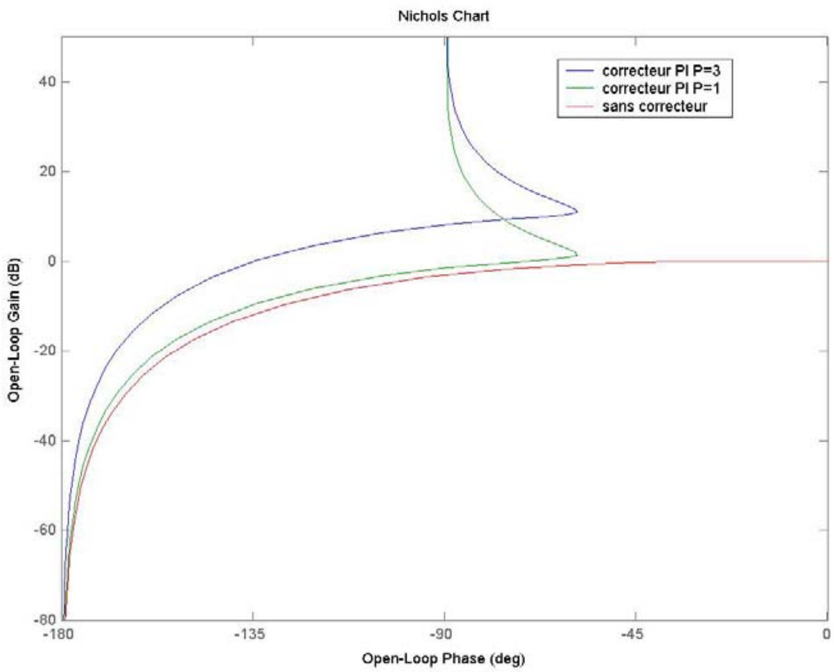
IIID11 - $\frac{I}{\tau} = \frac{\omega_r}{10}$

A.N. : $\frac{I}{\tau} = 5337,45 rad.s^{-1}$

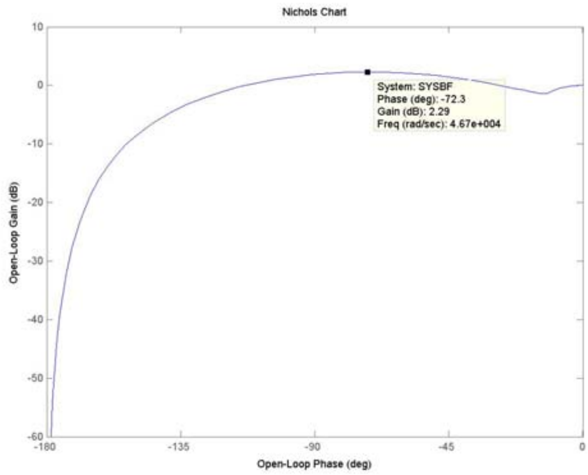
Soit on trace le diagramme de Black en boucle ouverte : graphiquement $P = 3$.

Soit on considère que le correcteur PI n'intervient pas aux alentours des fréquences considérées et on utilise la valeur de P trouvée précédemment soit $P = 3,84$. Dans la suite, la première solution a été choisie car elle reste plus précise.

IIID12 – Fonction de transfert en Boucle Ouverte : $\frac{dfmesuré}{dfconsigne} = \frac{P}{\frac{p^2}{\omega_n^{\ 2}} + 2m\frac{p}{\omega_n} + 1} . \left(\frac{I}{\tau p} + 1\right)$



On obtient en boucle fermée : $\omega_r = 46700 rad.s^{-1}$



IIID13 - erreur statique nulle : $\lim\limits_{t\to\infty} erreurdf = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{1}{1+\dfrac{P}{\dfrac{p^2}{\omega_n^2}+2m\dfrac{p}{\omega_n}+1}.\left(\dfrac{I}{\tau p}+1\right)}\dfrac{0,5}{p} = 0Hz$

IIID14 - Variation de $erreurdf$ en réponse à un échelon d'amplitude 10 nm sur l'entrée AR :

$$\Delta erreurdf = \lim_{p\to 0} p \frac{\dfrac{Kcantilever}{\dfrac{p^2}{\omega_n^2}+2m\dfrac{p}{\omega_n}+1}}{1+\dfrac{P}{\dfrac{p^2}{\omega_n^2}+2m\dfrac{p}{\omega_n}+1}.\left(\dfrac{I}{\tau p}+1\right)}\frac{10.10^{-9}}{p} = 0Hz$$

IIID15 – D'après l'annexe 2 : $Q = \dfrac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$ (équation à résoudre pour $20\log Q = 2,3dB$)

Coefficient d'amortissement m : $m = 0,424$

Temps de réponse du système bouclé :

D'après l'annexe 3, $t_r.\omega_0 \approx 5,2$ pour $m = 0,424$

D'après l'annexe 2 $\omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.m^2}$, avec $\omega_r = 46700 rad.s^{-1}$

donc $\omega_0 = \dfrac{\omega_r}{\sqrt{1-2.m^2}} = 58354 rad.s^{-1}$

D'où $t_r = \dfrac{5,2}{\omega_0} \approx 89\mu s$

IIID16 – Erreur nulle dans le cas d'une réponse à un échelon. Erreur non nulle dans le ces d'une réponse à une rampe.

Solution : balayer la surface de l'échantillon à une vitesse plus lente.

Elément à ajouter : une intégration dans la boucle ouverte.