

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Éléments d'une prothèse auditive numérique

Remarques

Les réponses principales sont encadrées.

Option A / Option B

Ce document contient six parties repérées A, B, C, D, E et F et correspond au sujet de l'option A

Le sujet de l'option B comporte quatre parties repérées A, B, C et D. Les trois premières parties sont identiques à celles de l'option A. La partie D correspond à la partie F de l'option A.

A – Modélisation du microphone

A-1 Sensibilité du microphone à 1kHz : -60 dB relatifs à $1,0$ V / $0,1$ Pa \Rightarrow $S = 10^{-2}$ V/Pa
(Cf. Annexe 6.a, Standard Response)

A-2 à 1 kHz : $V_{me} = S \cdot P_{Se} = 20 S 10^{\frac{P_{SdB}}{20} - 6} = 10^{\frac{P_{SdB} - 134}{20}}$ V
cette valeur est susceptible de varier de ± 3 dB.
à 5 kHz, il faut lui rajouter 5dB.
Cf. document réponse 1.

A-3 L'allure de la courbe est celle d'un passe-haut du premier ordre dont la fréquence de coupure serait aux alentours de 200 Hz. On peut donc écrire :

$$T_{mHP}(p) = S \frac{\frac{p}{\omega_{HP}}}{1 + \frac{p}{\omega_{HP}}} \quad \text{soit :} \quad \frac{S^2}{|T_{mHP}(j\omega)|^2} - \frac{\omega_{HP}^2}{\omega^2} = 1$$

Sur la courbe, on mesure : $|T_{mHP}(j 2 \pi 100)| = 10^{-\frac{40 + \frac{20 \times 2,2}{6,85}}{20}} = 47,6 \times 10^{-4}$

$$|T_{mHP}(j 2 \pi 300)| = 10^{-\frac{40 + \frac{20 \times 0,4}{6,85}}{20}} = 87,4 \times 10^{-4}$$

d'où l'on tire : $S = 1,04 \cdot 10^{-2}$ et $\omega_{HP} = 2 \pi 195$ rd/s ($1e-2$ et $2\pi 200$ rd/s acceptable)

A-4 Ici, l'allure de la courbe est celle d'un passe-bas du second ordre de fonction de transfert:

$$T_{mLP}(p) = S \frac{1}{1 + 2 m \frac{p}{\omega_{LP}} + \frac{p^2}{\omega_{LP}^2}}$$

l'amplitude de la résonance (5 dB) permet de déterminer l'amortissement.

$$2 m \sqrt{1 + m^2} = 10^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow m = 0,28$$

À 7400 Hz, le module de la fonction de transfert a la même valeur qu'en basse fréquence:

$$\omega_{LP} = \frac{2 \pi 7400}{\sqrt{2 - 4m^2}} = 2 \pi 5700 \text{ rd/s}$$

A-5

$$T_m(p) = S \frac{\frac{p}{\omega_{HP}}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_{HP}}\right) \left(1 + 2 m \frac{p}{\omega_{LP}} + \frac{p^2}{\omega_{LP}^2}\right)}$$

avec

$$0,73 \times 10^{-2} \leq S \leq 1,47 \times 10^{-2}$$

$$(S_{typ} = 1,04 \times 10^{-2})$$

$$\omega_{HP} = 2 \pi 195 \text{ rd/s}$$

$$\omega_{LP} = 2 \pi 5700 \text{ rd/s}$$

$$m = 0,28$$

$$|F(j 2 \pi 800)| = 1$$

A-6 K est tel que $|H(j 2 \pi 1000)| = 1$.

$$|H(j 2 \pi 1000)|^2 = K^2 \frac{1000^4 \times 150 \times 800 \times 9000 \times 18000}{1000^8 \times (1 + 0,15^2) \times (1 + 0,8^2) \times (1 + 9^2) \times (1 + 18^2)}$$

soit : $K = 47,95$

A-7 Module de H(jω)

diagramme asymptotique :

$$f \ll 150\text{Hz} \Rightarrow |H(j2\pi f)| \approx \frac{K f^2 \sqrt{f_1 f_2 f_3 f_4}}{f_1 f_2 f_3 f_4} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{pente } +40 \text{ dB/décade} \\ \text{coupant } 0 \text{ dB à } f = 303 \text{ Hz} \end{array}$$

$$150\text{Hz} < f < 800\text{Hz} \Rightarrow |H(j2\pi f)| \approx \frac{K f \sqrt{f_1 f_2 f_3 f_4}}{f_2 f_3 f_4} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{pente } +20 \text{ dB/décade} \\ \text{coupant } 0 \text{ dB à } f = 613 \text{ Hz} \end{array}$$

$$800\text{Hz} < f < 9000\text{Hz} \Rightarrow |H(j2\pi f)| \approx \frac{K \sqrt{f_1 f_2 f_3 f_4}}{f_3 f_4} \Rightarrow \text{horizontale à } 2,3 \text{ dB}$$

$$9000\text{Hz} < f < 18000\text{Hz} \Rightarrow |H(j2\pi f)| \approx \frac{K \sqrt{f_1 f_2 f_3 f_4}}{f f_4} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{pente } -20 \text{ dB/décade} \\ \text{coupant } 0 \text{ dB à } f = 11,7 \text{ kHz} \end{array}$$

$$f > 18000\text{Hz} \Rightarrow |H(j2\pi f)| \approx \frac{K \sqrt{f_1 f_2 f_3 f_4}}{f^2} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{pente } -40 \text{ dB/décade} \\ \text{coupant } 0 \text{ dB à } f = 14,5 \text{ kHz} \end{array}$$

points remarquables :

$$20 \log_{10}(|H(j2\pi 150)| = 0,17) = -15,4\text{dB}$$

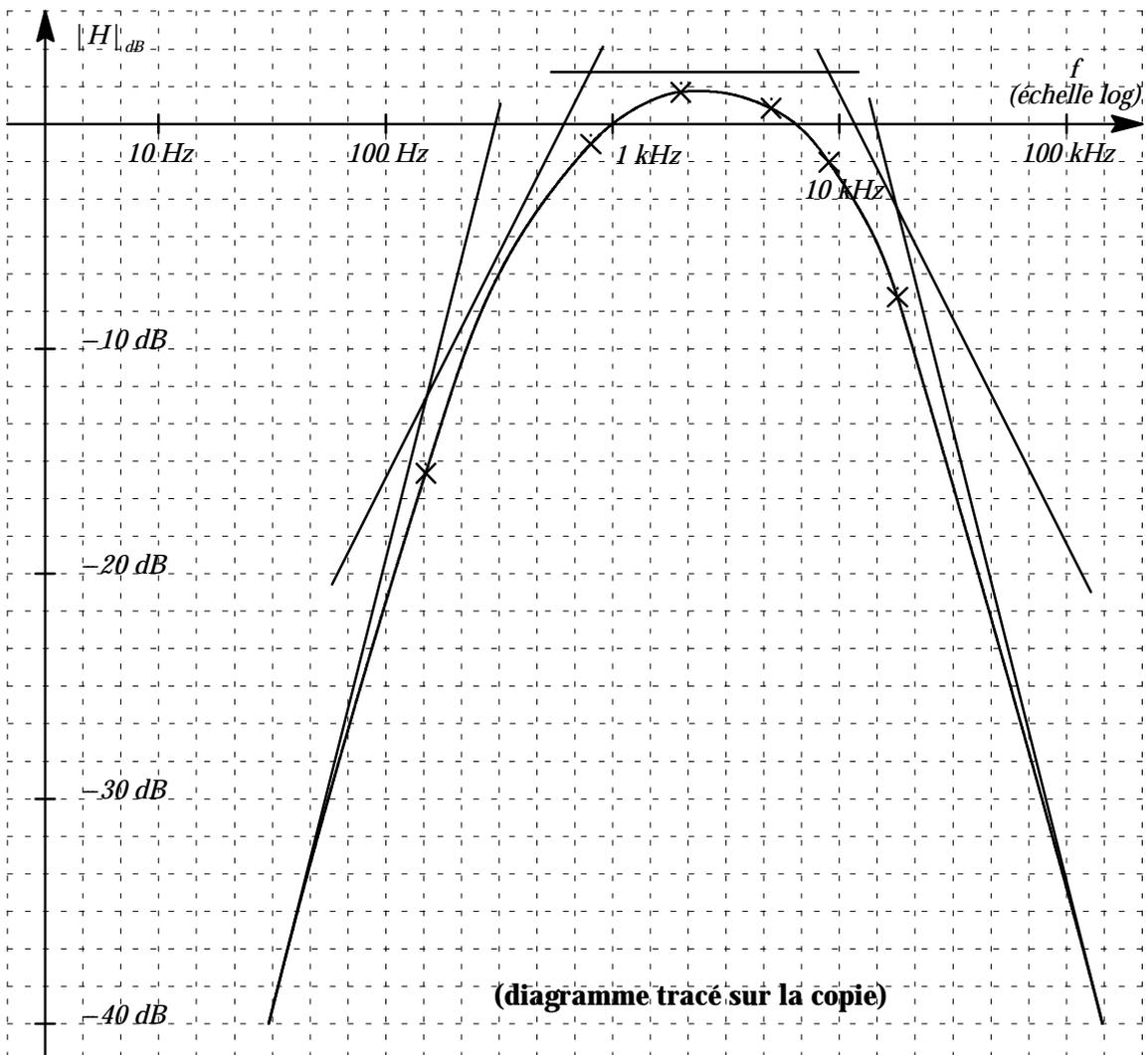
$$20 \log_{10}(|H(j2\pi 5000)| = 1,08) = 0,7\text{dB}$$

$$20 \log_{10}(|H(j2\pi 800)| = 0,9) = -0,9\text{dB}$$

$$20 \log_{10}(|H(j2\pi 9000)| = 0,822) = -1,7\text{dB}$$

$$20 \log_{10}(|H(j2\pi 2000)| = 1,17) = 1,4\text{dB}$$

$$20 \log_{10}(|H(j2\pi 18000)| = 0,41) = -7,7\text{dB}$$



A-8 P_{SB} s'exprime en pascals (Pa). γ s'exprime donc en Pa^2/Hz

A-9

$$P_{SB}^2 = \gamma \int_0^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df$$

$$V_{meb}^2 = \gamma \int_0^{\infty} |H(j2\pi f) \times T_m(j2\pi f)|^2 df$$

A-10

$$V_{meb}^2 = P_{SB}^2 \frac{\int_0^{\infty} |H(j2\pi f) \times T_m(j2\pi f)|^2 df}{\int_0^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df}$$

A-11

$$|H(j2\pi f)|^2 = \frac{19,44 K^2 f^4 10^{12}}{(f^2 + 150^2)(f^2 + 800^2)(f^2 + 9000^2)(f^2 + 18000^2)}$$

$$|F(j2\pi f)|^2 = \frac{(36 f 10^6)^2}{(f^2 + 200^2) \left((f^2 + 6000^2)^2 + (3360 f^2)^2 \right)}$$

en posant $f = 1000x$, on obtient :

$$|H(j2\pi 1000 x)|^2 = \frac{19,44 K^2 x^4}{(x^2 + 0,15^2)(x^2 + 0,8^2)(x^2 + 9^2)(x^2 + 18^2)}$$

$$|F(j2\pi 1000 x)|^2 = \frac{1296 x^2}{(x^2 + 0,2^2) \left((x^2 + 6^2)^2 + (3,36 x)^2 \right)}$$

par ailleurs :

$$\int_0^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df = 1000 \int_0^{\infty} |H(j2\pi 1000 x)|^2 dx$$

$$\text{soit : } \int_0^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df = 19440 K^2 \int_0^{\infty} \frac{x^4}{\left(x^2 + \frac{9}{400}\right) \left(x^2 + \frac{16}{25}\right) (x^2 + 81) (x^2 + 324)} dx$$

$$\text{soit encore : } \int_0^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df = 19440 I K^2$$

$$\int_0^{\infty} |H(j2\pi f) \times T_m(j2\pi f)|^2 df = 1000 \int_0^{\infty} |H(j2\pi 1000 x) \times T_m(j2\pi 1000 x)|^2 dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2,52 K^2 S^2 10^7 x^6}{\left(x^2 + \frac{9}{400}\right) \left(x^2 + \frac{16}{25}\right) (x^2 + 81) (x^2 + 324) \left(x^2 + \frac{1}{25}\right) \left((x^2 + 36)^2 + \frac{7056}{625} x^2 \right)} dx$$

Il s'ensuit que :

$$V_{meb}^2 = P_{SB}^2 \frac{2,52 J K^2 S^2 10^7}{19440 I K^2} = 1,26 S^2 P_{SB}^2$$

soit :

$$V_{meb} = 1,12 S P_{SB}$$

A-12 Soit $V_{me}(f) = S |F(j2\pi f)| P_{Se}$ la valeur efficace du signal utile présent en sortie du microphone. En nommant RSB le rapport signal sur bruit :

$$RSB(f) = \frac{V_{me}^2}{V_{meb}^2} = \frac{(S |F(j2\pi f)| P_{Se})^2}{(1,12 S P_{SB})^2}$$

En se rappelant que $P_{Se} = 20 \times 10^{\frac{P_{S_{dB}}}{20}-6}$ Pa et que $P_{SB} = 20 \times 10^{\frac{P_{SB_{dB}}}{20}-6}$ Pa il vient :

$$RSB_{dB}(f) = 20 \log_{10} \frac{|F(j2\pi f)|}{1,12} + P_{S_{dB}} - P_{SB_{dB}}$$

à 1 kHz, $|F(j2\pi f)| \approx 1$. Il s'ensuit :

$$RSB_{dB}(1 \text{ kHz}) = P_{S_{dB}} - P_{SB_{dB}} - 1 = 30 - 29 - 1 = 0 \text{ dB}$$

A-13 D'après le schéma indicatif du microphone, on peut s'attendre à une densité spectrale de bruit à peu près constante (bruit blanc en provenance des résistances et du FET), avec une augmentation en 1/f dans les basses fréquences (bruit rose, provenant essentiellement du FET). Il faut aussi penser au bruit généré par l'agitation thermique de l'air ambiant qui est retransmis par l'électret.

A-14 Par définition, la densité spectrale d'un bruit blanc est constante en fonction de la fréquence. Cette approximation se justifie si l'on considère que le filtre de pondération élimine assez énergiquement les basses fréquences. Il s'ensuit que l'aspect "rose" du bruit du microphone n'apparaît plus à la sortie de ce filtre et n'est donc pas pris en compte lorsqu'on calcule le niveau de bruit ramené en entrée

A-15

$$U_{eff}^2 = \gamma_m \int_0^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df = 14040 \gamma_m$$

La bande passante de bruit du filtre de pondération est donc de 14 kHz

A-16 De A-11 : $U_{eff}^2 = (1,12 S P_{SB})^2$

$$\text{soit : } \gamma_m = \frac{(1,12 S P_{SB})^2}{14040}$$

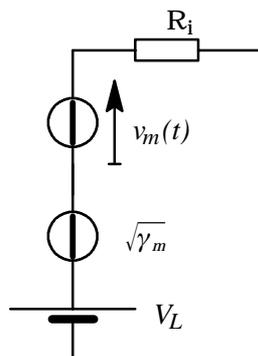
la valeur typique de γ_m s'obtient pour les valeurs typiques $S = 10^{-2}$ et $P_{SB_{dB}} = 25$ dB :

$$\gamma_{m_{typ}} = 1,13 \times 10^{-15} \frac{V^2}{Hz} \quad \text{soit : } \sqrt{\gamma_{m_{typ}}} = 34 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

de même, sa valeur maximale s'obtient pour les valeurs maximales $S = 1,4 \times 10^{-4}$ et $P_{SB_{dB}} = 29$ dB

$$\gamma_{m_{max}} = 5,56 \times 10^{-15} \frac{V^2}{Hz} \quad \text{soit : } \sqrt{\gamma_{m_{max}}} = 74 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

A-17 |



grandeur	min	typ	max	unité
R_i	2	3,5	6	k Ω
V_L	0,2	0,5	0,9	V
$\sqrt{\gamma_m}$		34	74	nV/ \sqrt{Hz}
S	$0,7 \times 10^{-2}$	10^{-2}	$1,4 \times 10^{-2}$	V/Pa

$$v_m(t) = S f(t) * p_S(t)$$

expression dans laquelle * désigne le produit de convolution et f(t) est la transformée de Laplace inverse de F(p) (Cf. sujet, page 4).

B – Étude théorique de l'échantillonnage

B-1

$$P^F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f t} P(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) dt$$

$$P^F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f t} \delta(t - nT_e) dt \text{ soit } P^F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f nT_e} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

Par ailleurs,

$$S_P^F(f) = S^F(f) * P^F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S^F(\nu) P^F(f - \nu) d\nu = \frac{1}{T_e} \int_{-\infty}^{+\infty} S^F(\nu) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \nu - \frac{k}{T_e}\right) d\nu$$

$$S_P^F(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S^F(\nu) \delta\left(f - \nu - \frac{k}{T_e}\right) d\nu \text{ soit } S_P^F(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S^F\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

le spectre de S(t), après avoir vu son amplitude multipliée par la fréquence d'échantillonnage, est reproduit autour des multiples de cette fréquence.

B-2 Cf. document réponse 2.

B-3 Pour pouvoir reconstituer S(t) à partir de S_P(t), il faut et il suffit que F_e - F_C > F_C, soit $F_e > 2 F_C$. Attention, pour F_e proche de 2F_C, cette reconstitution ne sera possible que si l'on dispose d'un filtre dont la réponse en fréquence est parfaitement rectangulaire.

B-4 Il faut introduire entre la source et l'échantillonneur un filtre passe-bas, appelé "filtre anti-repliement" qui aura pour effet de limiter le spectre du signal échantillonné. L'ordre du filtre à choisir dépendra de l'écart entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence limite supérieure de la bande passante, ainsi que du rapport signal sur bruit (plus précisément signal "utile" sur signaux "images") à respecter dans la bande passante.

B-5 $G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f t} g(t) dt = \int_0^{\tau} e^{-2\pi j f t} dt = \left[\frac{e^{-2\pi j f t}}{-2\pi j f} \right]_0^{\tau}$ soit $G(f) = \tau e^{-\pi j f \tau} \frac{\sin 2\pi f \frac{\tau}{2}}{2\pi f \frac{\tau}{2}}$

B-6 $S_{\tau}^F(f) = S_P^F(f) G(f) = \tau e^{-j\pi f \tau} \frac{\sin 2\pi f \frac{\tau}{2}}{2\pi f \frac{\tau}{2}} F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^F(f - k F_e) = \tau e^{-j\pi f \tau} \frac{\sin 2\pi f \frac{\tau}{2}}{2\pi f \frac{\tau}{2}} S_P^F(f)$

On retrouve le spectre de S_P(t) modulé par un sinus cardinal.

$$\tau = \frac{5}{8} T_e \Rightarrow |S_{\tau}^F(f)| = \frac{5}{8} \left| \frac{\sin 2\pi \frac{5f}{16F_e}}{2\pi \frac{5f}{16F_e}} \right| \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^F\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

L'amplitude du sinus cardinal est de 5/8, il s'annule pour f = 8kF_e/5. Cf. document réponse 2.

B-7 Si la durée du blocage devient égale à la période d'échantillonnage,

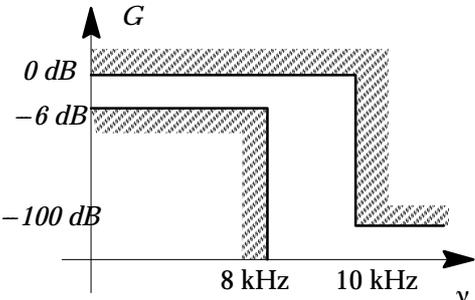
$$\tau = T_e \Rightarrow |S_{\tau}^F(f)| = \left| \frac{\sin \pi \frac{f}{F_e}}{\pi \frac{f}{F_e}} \right| \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^F\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

On constate que les "zéros" du sinus cardinal viennent se "poser" sur les multiples de F_e, ce qui a pour effet d'atténuer fortement les répliques. On doit cependant aussi remarquer que le spectre du signal original se trouve déformé par la modulation en sinus cardinal si F_e est trop proche de 2F_C. Cf. document réponse 2.

B-8 Le point commun entre ces trois spectres réside dans la bande de fréquence 0 à F_C . On remarque cependant un effet de distorsion (surtout marqué dans le troisième) et une atténuation plus ou moins grande de l'énergie dans cette bande de fréquence. Lors de la reconstitution du signal, si l'on fait l'hypothèse d'un filtrage idéal, on diminue la distorsion de spectre en diminuant τ . Cependant, l'énergie dans la bande de base diminue quand le produit $F_e \tau$ diminue. La solution la plus efficace semble être de maintenir ce produit le plus grand possible (proche de 1) et de déformer la réponse du filtre de reconstitution afin de compenser la distorsion de spectre.

B-9 La fréquence image de 10 kHz, dans un échantillonnage à 18 kHz, est 8 kHz. Dans ces conditions, on retrouve un signal parasite à 8 kHz, d'amplitude 100 dB SPL. À la fréquence de 10 kHz, l'atténuation du filtre anti-repliement doit donc être d'au moins 100 dB pour que le signal parasite ne soit pas perceptible.

Les signaux à $F_e/2$ ne se replient pas dans la bande utile. $F_e/2$ peut donc être au milieu de la bande de transition du filtre.



B-10 Dans les trois cas :

$$P_1 = 6 \text{ dB}$$

$$P_2 = 100 \text{ dB}$$

$$P_3 = 9,3$$

$$\lambda = 10/8 = 1,25$$

Cf. document réponse 3

d'où les résultats :

Butterworth : $n \geq 23$

Tchebycheff : $n = 15$

Cauer : $n = 9$

B-11 Cf. fig. solution 1.

Filtre de Butterworth :

La réponse est monotone décroissante, les n (ordre du filtre) premières dérivées de $|H^F(f)|^2$ sont nulles pour $f=0$. Il s'agit d'une réponse la plus plate possible.

Filtre de Tchebycheff :

Recouvre deux types de filtres. Pour le premier type, la réponse est monotone décroissante en dehors de la bande passante et présente des oscillations d'amplitude constante dans la bande passante. Pour le second type, la réponse est monotone décroissante en dehors de la bande coupée et présente des oscillations d'amplitude constante dans la bande coupée.

Filtre de Cauer (ou elliptique):

Il présente des oscillations d'amplitude constante dans la bande passante et la bande coupée. La largeur de la zone de transition est la plus petite pour un ordre donné.

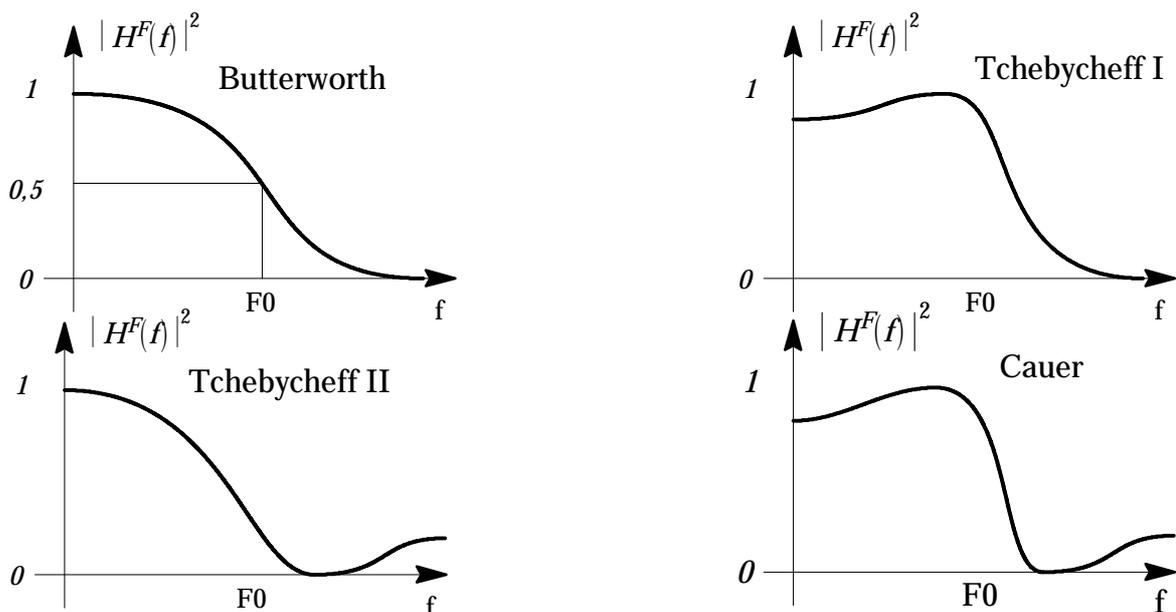
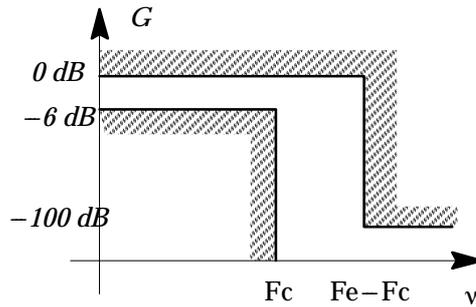


fig. solution 1 : filtres standard

B-12 Si l'on augmente la fréquence d'échantillonnage, on repousse les fréquences susceptibles de créer des "images" dans la bande utile (il faut bien entendu supposer que la limitation de la bande utile à F_c est assurée de manière numérique par un filtre de décimation). Par là, on relâche les contraintes de largeur de la zone de transition du filtre anti-repliement.



Il s'agit d'un filtre à temps continu. La solution envisagée ici consiste à exploiter la symétrie de F_c et $F_e - F_c$ autour de $F_e/2$. En augmentant l'écart entre F_c et $F_e/2$, on augmente la largeur de la bande de transition du filtre.

B-13

$$\lambda = \frac{F_e - F_c}{F_c} \Rightarrow \frac{F_e}{F_c} = 1 + \lambda$$

Sur les abaques, on doit toujours obtenir $P_3 = 9,3$. Pour les trois abaques, l'intersection de la courbe étiquetée $n = 3$ avec cette horizontale est en dehors de l'abaque. Il reste cependant possible d'obtenir la valeur de λ par interpolation.

Butterworth :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 10 ; n = 3 \Rightarrow P_3 = 6 \\ \lambda = 3,5 ; n = 3 \Rightarrow P_3 = 3,3 \end{array} \right\} \Rightarrow P_3 = 6 + 3,3 = 9,3 ; n = 3 \Rightarrow \lambda = 10 \times 3,5 = 35$$

car l'échelle horizontale est logarithmique et l'abaque est formée de droites.

Tchebycheff :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 10 ; n = 3 \Rightarrow P_3 = 7,2 \\ \lambda = 4,2 ; n = 3 \Rightarrow P_3 = 7,2 - 2,1 \end{array} \right\} \Rightarrow P_3 = 7,2 + 2,1 = 9,3 ; n = 3 \Rightarrow \lambda = 10 \times \frac{10}{4,2} = 23,8$$

car l'échelle horizontale est logarithmique et la courbe $n=3$ est approximativement linéaire dans sa dernière partie.

Cauer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 5 ; n = 3 \Rightarrow P_3 = 6,6 \\ \left(\begin{array}{l} \lambda = 1,75 \\ \text{tg à } n = 3 \text{ en } \lambda = 5 \end{array} \right) \Rightarrow P_3 = 6,6 - 2,7 \end{array} \right\} \Rightarrow P_3 = 6,6 + 2,7 = 9,3 ; n = 3 \Rightarrow \lambda = 5 \times \frac{5}{1,75} = 14,3$$

Récapitulation :

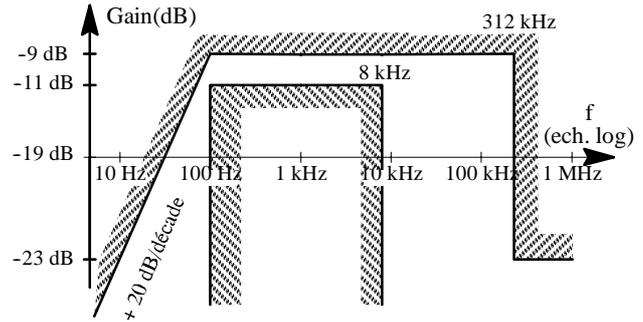
$$\text{Butterworth : } \lambda = 35 \Rightarrow \left(\frac{F_e}{F_c} \right)_{\min} = 36$$

$$\text{Tchebycheff : } \lambda = 23,8 \Rightarrow \left(\frac{F_e}{F_c} \right)_{\min} = 24,8$$

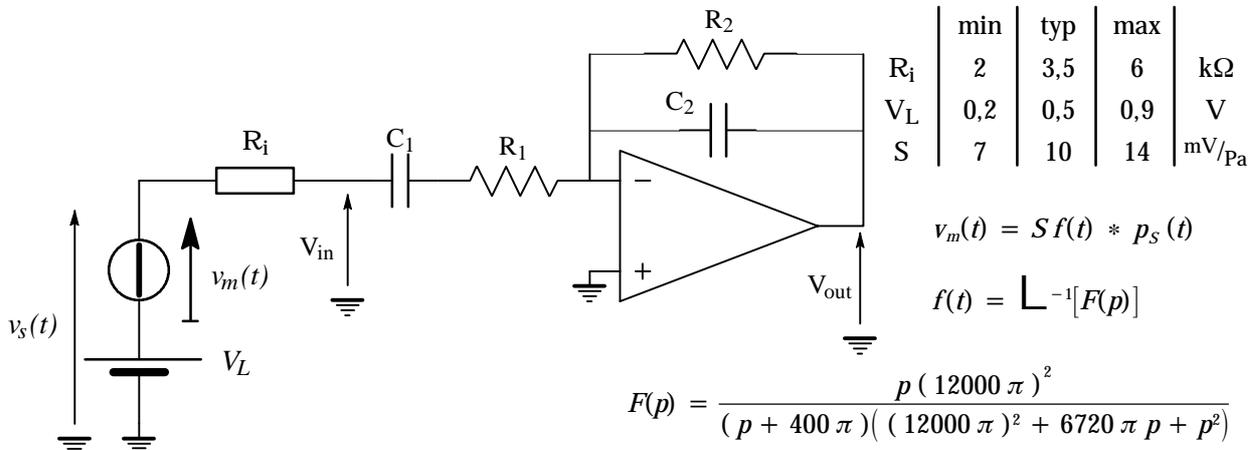
$$\text{Cauer : } \lambda = 14,3 \Rightarrow \left(\frac{F_e}{F_c} \right)_{\min} = 15,3$$

C – Étude de l'étage d'entrée

C-1 Gabarit de la réponse en fréquence de l'étage d'entrée. D'après la réponse à la question A-2, on voit que la tension maximale en sortie du microphone, pour un niveau d'entrée de 100 dB est de 50 mV efficaces. Une amplitude de 50 mV crête à crête correspond à une valeur efficace de 17,6 mV. Le gain de l'étage d'entrée doit donc être de $17,6/50 = 0,35$, soit -9 dB. Attention, on considère 50 mV et non 20 mV en sortie du microphone car on se place dans le cas de l'amplitude la plus élevée (@5kHz)



C-2 Schéma équivalent de l'ensemble "microphone - étage d'entrée"



C-3 Relations que doivent satisfaire les composants du montage pour que la réponse de cet étage respecte le gabarit défini à la question C-1 :

$$\frac{V_{out}(p)}{V_S(p)} = - \frac{R_2 C_1 p}{(1 + R_2 C_2 p)(1 + (R_1 + R_i) C_1 p)} = - \frac{R_2}{R_1 + R_i} \frac{(R_1 + R_i) C_1 p}{(1 + R_2 C_2 p)(1 + (R_1 + R_i) C_1 p)}$$

d'où :

$\frac{1}{(R_1 + R_i) C_1} = \omega_1 = 2 \pi 100$	$\frac{1}{R_2 C_2} = \omega_2 = 2 \pi 8000$	$\frac{R_2}{R_1 + R_i} = 0,35$
--	---	--------------------------------

Capacités.

C-4 Si l'on appelle a_2 le côté du carré de poly2 de la capacité ($W_2=L_2=a_2$) et a_1 le côté de son carré de poly1, on a les relations :

$$C = a_2^2 C_{PP}^S + 4 a_2 C_{PP}^P$$

$$\text{d'où : } a_2 = \frac{\sqrt{4 C_{PP}^P{}^2 + C C_{PP}^S} - 2 C_{PP}^P}{C_{PP}^S}$$

$$\text{et } a_1 = a_2 + 2 E_{\min}(\text{poly2})$$

Avec $C_{PP}^P = 0,2$ fF/ μm^2 ; $C_{PP}^S = 1,77$ fF/ μm^2 on obtient (C en fF et a_i en μm) :

$$a_2 = \frac{\sqrt{0,16 + 1,77 C} - 0,4}{1,77}$$

$$a_1 = a_2 + 3$$

Cf. résultats sur document réponse 4.

Attention : l'arrondi à 0,1 μm près pour a_1 et a_2 est important.

C-5 Les amplificateurs opérationnels occupent des surfaces allant de 20000 μm^2 à 120000 μm^2 pour les plus gros. Ainsi, la capacité de 1 nF occupe-t-elle 30 fois la surface d'un amplificateur opérationnel "ordinaire". On pourra donc réaliser dans cette technologie des capacités allant de quelques dizaines de fF à quelques dizaines de pF. Au delà, le coût (surface) des capacités devient prohibitif.

C-6 Dans les expressions suivantes les dimensions sont en microns et les capacités en femtofarads.

$$\begin{aligned}
 a_{2max} &= a_2 + (2, 2 - 2) = a_2 + 0, 2 & C_{max} &= a_{2max} \left(a_{2max} C_{PPmax}^S + 4 C_{PPmax}^P \right) \\
 a_{2typ} &= a_2 - (2 - 1, 9) = a_2 - 0, 1 & C_{typ} &= a_{2typ} \left(a_{2typ} C_{PPtyp}^S + 4 C_{PPtyp}^P \right) \\
 a_{2min} &= a_2 - (2 - 1, 6) = a_2 - 0, 4 & C_{min} &= a_{2min} \left(a_{2min} C_{PPmin}^S + 4 C_{PPmin}^P \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{max} &= 1, 92 a_2^2 + 1, 608 a_2 + 0, 2448 \\
 C_{typ} &= 1, 77 a_2^2 + 0, 446 a_2 - 0, 0623 \\
 C_{min} &= 1, 65 a_2^2 - 0, 56 a_2 - 0, 04
 \end{aligned}$$

 (Cf. document réponse 5).

C-7 Appelons C_d la valeur de la capacité "dessinée" et C_e la valeur effective de la capacité. On a :

$$\begin{aligned}
 C_d &= W_2 L_2 C_{PP}^S + 2(W_2 + L_2) C_{PP}^P \\
 C_e &= (W_2 - 2 \Delta e) (L_2 - 2 \Delta e) C_{PP}^S + 2(W_2 + L_2 - 4 \Delta e) C_{PP}^P \\
 \Delta C &= C_e - C_d
 \end{aligned}$$

$$\Delta C = - 2 \Delta e \left((W_2 + L_2 - 2 \Delta e) C_{PP}^S + 4 C_{PP}^P \right)$$

$$\frac{\Delta C}{C} = - 2 \Delta e \frac{(W_2 + L_2 - 2 \Delta e) C_{PP}^S + 4 C_{PP}^P}{W_2 L_2 C_{PP}^S + 2(W_2 + L_2) C_{PP}^P}$$

C-8 On a $C_{PP}^S \approx 10 \times C_{PP}^P$

$$\Rightarrow \frac{\Delta C}{C} = - 2 \Delta e \frac{(W_2 + L_2 - 2 \Delta e + 0, 4)}{W_2 L_2 + 0, 2 (W_2 + L_2)} = - 2 \Delta e \frac{W_2 + L_2}{W_2 L_2} \frac{1 + \frac{0, 4 - 2 \Delta e}{W_2 + L_2}}{1 + 0, 2 \frac{W_2 + L_2}{W_2 L_2}}$$

on a $- 0, 2 \leq \Delta e \leq 0, 4$. Il est aisé de montrer que, dans le cas d'une capacité carrée ($W_2 = L_2 = a_2$), le terme correctif vaut 1 lorsque Δe est minimum ($-0,2$). La valeur minimale du terme correctif (obtenue pour $\Delta e = 0,4$) est récapitulée dans le tableau suivant :

	valeur	a_2	$\left(\frac{a_2 - 0, 2}{a_2 + 0, 4} \right)$
C_1	0,01 pF	2,2 μm	0,77 = 1 - 0,33
C_2	0,1 pF	7,3 μm	0,92 = 1 - 0,08
C_3	1 pF	23,5 μm	0,97 = 1 - 0,03
C_4	10 pF	75 μm	0,992 = 1 - 0,008
C_5	100 pF	237,5 μm	0,997 = 1 - 0,003
C_6	1 nF	751,5 μm	0,9992 = 1 - 0,0008

Ce tableau montre bien que, l'on commet une erreur inférieure à 10% si l'on néglige le terme correctif lorsque la capacité vaut plus de 0,1 pF. Cette erreur tombe en dessous de 3% à partir de 1 pF.

On peut donc écrire :

$$\frac{\Delta C}{C} = - 2 \Delta e \frac{W_2 + L_2}{W_2 L_2} \quad \text{si } C > 0, 1 \text{ pF}$$

C'est à dire que l'erreur relative commise sur une capacité est proportionnelle au rapport entre son périmètre et sa surface.

C-9 Le rapport de deux capacités pourra être fixé avec une bonne précision si elles ont même erreur relative. Or, on voit que l'erreur relative dépend du rapport périmètre/surface de la capacité. Deux capacités suffisamment grandes, ayant même rapport périmètre/surface auront même erreur relative. Par suite, le rapport de ces deux capacités après réalisation sera le même que le rapport des capacités "théoriques".

Pour réaliser deux capacités C_A et C_B telles que $C_A/C_B = 3/5$, on pourra réaliser C_A carrée et C_B rectangulaire, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} W_B L_B = \frac{5}{3} W_A^2 \\ W_B + L_B = \frac{10}{3} W_A \end{array} \right\} \Rightarrow L_B = \frac{5}{3} W_A \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{5}} \right)$$

(solution d'un système symétrique)

La deuxième solution consiste à dessiner $5 + 3 = 8$ capacités identiques. Il suffit ensuite de grouper trois d'entre elles en parallèle pour obtenir C_A et les cinq autres pour obtenir C_B .

C-10 $C_{1S} = W_1 L_1 C_{PS}^S + 2(W_1 + L_1) C_{PS}^P$ soit : $C_{1S} = 0,066 a_1^2 + 0,192 a_1$
(Capacités en fF et dimensions en μm) Cf. document réponse 6.

Résistances

C-11

$$\frac{R}{R_h} = k \left(\frac{h - 2W}{W} + 1 \right) + (k - 1) \frac{D}{W}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = W - D + \frac{W \frac{R}{R_h} + D}{k}} \Leftrightarrow hk = k(W - D) + D + W \frac{R}{R_h}$$

$$\boxed{l = k(D + W) - D} \Leftrightarrow k = \frac{l + D}{W + D}$$

C-12 En éliminant k entre ces deux expressions on obtient :

$$hl + hD + lD - lW - W \left(2D + (W + D) \frac{R}{R_h} \right) = 0$$

En considérant que le dessin de la résistance est approximativement carré, on peut poser :

$$S_{th} = hl = x^2 \quad \text{soit} \quad h = l = \sqrt{S_{th}} = x$$

L'équation devient alors :

$$x^2 + (2D - W)x - \left(W^2 \frac{R}{R_h} + WD \left(2 + \frac{R}{R_h} \right) \right) = 0$$

dont la solution positive est :

$$\boxed{\sqrt{S_{th}} = x = \frac{W}{2} \left[1 - 2 \frac{D}{W} + \sqrt{\left(1 + 2 \frac{D}{W} \right)^2 + 4 \left(1 + \frac{D}{W} \right) \frac{R}{R_h}} \right]}$$

qui représente la valeur idéale d'un côté du carré dans lequel s'inscrit la résistance cherchée.

k se déduit de x en considérant que l est peu différent de x :

$$\boxed{k = \frac{x + D}{W + D} = \frac{1 + \sqrt{\left(1 + 2 \frac{D}{W} \right)^2 + 4 \left(1 + \frac{D}{W} \right) \frac{R}{R_h}}}{2 \left(1 + \frac{D}{W} \right)}}$$

dont on aura toujours intérêt à prendre la partie entière.

C-13 Cf. document réponse 7.

C-14 Choix du matériau. On dispose de deux grandes classes de matériaux : les matériaux à faible résistivité (20 à 40 Ω/V) et le poly HR (1,2 kΩ/V). Dans les matériaux à faible résistivité, c'est le poly1 qui paraît le plus intéressant. Il possède le plus faible coefficient de température, la plus faible dispersion sur la résistivité, les dimensions minimales les plus faibles et la plus faible dispersion sur les dimensions. Ainsi, il sera toujours préférable d'utiliser le poly1 plutôt que les diffusions N+ ou P+ pour réaliser des résistances variant le moins possible en fonction de la température et les plus "prévisibles". Dans les deux tableaux suivants on a donc déterminé les dimensions des résistances en poly1 et en polyH.

Il va sans dire que les valeurs de D et W à utiliser dans ces calculs sont les valeurs typiques élaborées dans le document réponse 7.

$$S_{th} = \frac{W^2}{4} \left[1 - 2 \frac{D}{W} + \sqrt{\left(1 + 2 \frac{D}{W}\right)^2 + 4 \left(1 + \frac{D}{W}\right) \frac{R}{R_h}} \right]^2 \quad h = W \left(1 - \frac{D}{W} + \frac{\frac{R}{R_h} + \frac{D}{W}}{k} \right)$$

$$k = \frac{1 + \sqrt{\left(1 + 2 \frac{D}{W}\right)^2 + 4 \left(1 + \frac{D}{W}\right) \frac{R}{R_h}}}{2 \left(1 + \frac{D}{W}\right)} \quad l = W \left(k \left(1 + \frac{D}{W}\right) - \frac{D}{W} \right)$$

D'où l'on déduit :

pour poly1

$S_{th} = 6,2001 \left(0,59 + \sqrt{1,99 + \frac{R}{4,3575}} \right)^2$
$k = \frac{1 + \sqrt{1,99 + \frac{R}{4,3575}}}{2,41}$
$h = 4,98 \left(0,7952 + \frac{0,205 + \frac{R}{21}}{k} \right)$
$l = 6k - 1$

pour polyH

$S_{th} = 6,126 \left(0,576 + \sqrt{2,03 + \frac{R}{247,5}} \right)^2$
$k = \frac{1 + \sqrt{2,03 + \frac{R}{247,5}}}{2,42}$
$h = 4,95 \left(0,788 + \frac{0,212 + \frac{R}{1200}}{k} \right)$
$l = 6k - 1$

	R (Ω)	S _{th} (μm ²)	k (μm)	l (μm)	h (μm)	S (μm ²)
R1	10	43,9	1	5	7,4	37
R2	100	193	2	11	16,3	179,3
R3	1k	1,55k	6	35	43,7	1,53k
R4	10k	14,6k	20	119	122,6	14,6k
R5	100k	143k	63	377	380,4	143k
R6	1M	1,43M	199	1193	1195,6	1,43M
R7	10M	14,2M	629	3773	3774,1	14,2M
R8	100M	142M	1988	11927	11932,7	142M

	R (Ω)	S _{th} (μm ²)	k (μm)	l (μm)	h (μm)	S (μm ²)
R1	10	24,9	1	5	5	25
R2	100	27,9	1	5	5,4	27
R3	1k	56,6	1	5	9,1	45,5
R4	10k	308	3	17	18	306
R5	100k	2,63k	8	47	55,6	2,61k
R6	1M	25,2k	26	155	162,6	25,2k
R7	10M	249k	83	497	500,9	249k
R8	100M	2,48M	263	1577	1572,3	2,48M

Attention : les résistances R1 (poly1) et R1, R2, R3 (polyH) ne correspondent pas au dessin tel qu'il a été défini, mais à une structure dont la résistance ne se calcule pas de la même façon. Les valeurs obtenues ne sont donc pas significatives.

C-15 On peut considérer que les résistances réalisables vont de 100Ω à 100kΩ pour le poly1 et de 10kΩ à 10MΩ pour le polyH.

C-16 Les valeurs min, typ et max d'une résistance se calculent :

$$R_{\min} = R_{h_{\min}} \left(k \left(\frac{h}{W_{\max}} - 1 \right) + (k-1) \left(\frac{D}{W} \right)_{\min} \right)$$

$$R_{\text{typ}} = R_{h_{\text{typ}}} \left(k \left(\frac{h}{W_{\text{typ}}} - 1 \right) + (k-1) \left(\frac{D}{W} \right)_{\text{typ}} \right)$$

$$R_{\max} = R_{h_{\max}} \left(k \left(\frac{h}{W_{\min}} - 1 \right) + (k-1) \left(\frac{D}{W} \right)_{\max} \right)$$

	min	typ	max	unité
R_j	0,9	1,2	1,5	k Ω
W	4,75	4,95	5,15	μm
D	0,85	1,05	1,25	μm
D/W	0,165	0,212	0,263	

soit : $R_{\min} = \left(\frac{h-4,3}{5,72} \right) k - 0,1485$ $R_{\text{typ}} = \left(\frac{h-3,9}{4,125} \right) k - 0,2544$ $R_{\max} = \left(\frac{h-3,5}{3,17} \right) k - 0,3945$

	k	h	R_{\min}	R_{typ}	R_{\max}	ΔR	$\Delta R/R$
R_4	3	18 μm	7,03 k Ω	10 k Ω	13,3 k Ω	$\pm 3,3$ k Ω	33 %
R_7	83	500,9 μm	7,2 M Ω	10 M Ω	13 M Ω	± 3 M Ω	30 %

C-17 Compte tenu des résultats obtenus à la question précédente, la seule façon de réaliser des résistances ayant leurs valeurs dans un rapport précis consiste à réaliser des résistances élémentaires dans un matériau fortement résistif (polyH) et à les interconnecter avec du métal. Ainsi, pour obtenir $R_A/R_B = 3/5$, on dessinera 8 résistances identiques. R_A sera réalisée en mettant trois d'entre elles en série et on utilisera les cinq autres pour réaliser R_B .

C-18 $S_T = \alpha C^\beta + \gamma R^\delta$

$$\tau = RC \Rightarrow C = \frac{\tau}{R} \Rightarrow S_T = \alpha \frac{\tau^\beta}{R^\beta} + \gamma R^\delta$$

tous les coefficients étant positifs, cette fonction présente un minimum quand sa dérivée s'annule.

$$\frac{dS_T}{dR} = -\alpha\beta \frac{\tau^\beta}{R^{\beta+1}} + \gamma\delta R^{\delta-1}$$

$$\frac{dS_T}{dR} = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta \frac{\tau^\beta}{R^{\beta+1}} = \gamma\delta R^{\delta-1} \Leftrightarrow R^{\beta+\delta} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} \tau^\beta$$

$$R = \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} \right)^{\frac{1}{\beta+\delta}} \tau^{\frac{\beta}{\beta+\delta}} \quad C = \left(\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} \right)^{\frac{1}{\beta+\delta}} \tau^{\frac{\delta}{\beta+\delta}} \quad S_T = (\beta + \delta) \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{\frac{\delta}{\beta+\delta}} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta+\delta}} \tau^{\frac{\beta\delta}{\beta+\delta}}$$

AN : $R = 141 \times 10^6 \tau^{0,494}$ $C = \frac{\tau^{0,506}}{141 \times 10^6}$ $S_T = \frac{\tau^{0,4872}}{148 \times 10^3}$

C-19 $\tau = 20 \mu\text{s} \Rightarrow R_2 = 673 \text{ k}\Omega$ $C_2 = 29,7 \text{ pF}$ $S_T = 34773 \mu\text{m}^2$

$\tau = 1,6 \text{ ms} \Rightarrow R_1 = 5,8 \text{ M}\Omega$ $C_1 = 273 \text{ pF}$ $S_T = 294055 \mu\text{m}^2$

C-20 $\frac{R_2}{R_1 + 3,5 \text{ k}\Omega} \approx 0,116$

Ceci ne correspond pas au cahier des charges. La contrainte sur le gain nous interdit donc de réaliser les deux constantes de temps à "surface minimale".

C-21

- S C_1 est la plus grosse capacité de l'ensemble. De plus, en tant que capacité externe, elle pourra être beaucoup plus grande que 273 pF. En conséquence, R_1 pourra être beaucoup plus petite.
- S Placer C_1 à l'extérieur du circuit ne nécessite pas de rajouter de broches d'entrée-sortie (C_1 est connectée en série entre le microphone et le circuit intégré).

C-22

$$\begin{aligned}
 S_{C_2} &= \alpha C_2^\beta & \tau_2 &= R_2 C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\tau_2}{R_2} \\
 S_{R_1} &= \gamma R_1^\delta & K &= \frac{R_2}{R_1 + 3,5 \times 10^3} \Rightarrow R_1 = \frac{R_2}{K} - 3,5 \times 10^3 \\
 S_{R_2} &= \gamma R_2^\delta
 \end{aligned}$$

$$S_T = S_{C_2} + S_{R_1} + S_{R_2} = \alpha \frac{\tau_2^\beta}{R_2^\beta} + \gamma \left[R_2^\delta + \left(\frac{R_2}{K} - 3,5 \times 10^3 \right)^\delta \right]$$

tous les coefficients étant positifs, cette fonction présente un minimum quand sa dérivée s'annule.

$$\frac{dS_T}{dR_2} = -\alpha\beta \frac{\tau_2^\beta}{R_2^{\beta+1}} + \gamma\delta \left[R_2^{\delta-1} + \frac{1}{K} \left(\frac{R_2}{K} - 3,5 \times 10^3 \right)^{\delta-1} \right]$$

$$\boxed{\frac{dS_T}{dR_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} \frac{\tau_2^\beta}{R_2^{\beta+\delta}} = 1 + \frac{1}{K^\delta} \left(1 - \frac{3,5 \times 10^3 K}{R_2} \right)^{\delta-1}}$$

en identifiant avec l'expression de l'énoncé, on obtient :

$$\boxed{A = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = 7,64 \times 10^{15}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = 3,5 \times 10^3}$$

Pour $K = 35$ et $R_2 = 670\text{k}\Omega$, on obtient :

$$\left(1 - \frac{3,5 \times 10^3 K}{R_2} \right)^{\delta-1} = (1 - 0,19)^{-0,0139}$$

or,

$$(1 - \epsilon)^a = 1 - a\epsilon + \frac{a(a-1)}{2}\epsilon^2 - \frac{a(a-1)(a-2)}{6}\epsilon^3 + \dots$$

On voit très vite que les termes d'ordre supérieur ou égal à deux sont négligeables :

$$\begin{aligned}
 a\epsilon &\approx -2,6 \times 10^{-3} \\
 \frac{a(a-1)}{2}\epsilon^2 &\approx 2,5 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

La condition permettant d'annuler la dérivée de S_T par rapport à R_2 peut donc s'écrire :

$$\boxed{7,64 \times 10^{15} \frac{\tau_2^{0,963}}{R_2^{1,9491}} \approx 1 + \frac{1,0026}{K^{0,9861}}}$$

d'où l'on déduit :

$$\boxed{R_2 \approx \left[\frac{7,64 \times 10^{15} \tau_2^{0,963}}{1 + \frac{1,0026}{K^{0,9861}}} \right]^{\frac{1}{1,9491}} \approx 662\text{k}\Omega}$$

Ce qui justifie *a posteriori* l'approximation précédente. Il est aussi possible de confirmer cette valeur par une résolution numérique (sans simplification). On obtient alors $R_2 = 661,738\text{ k}\Omega$

et

$$\boxed{R_1 = \frac{R_2}{K} - 3,5 \times 10^3 \approx 15,4\text{k}\Omega} \quad \boxed{C_2 = \frac{\tau_2}{R_2} \approx 30,2\text{pF}} \quad \boxed{S_T = 35180\mu\text{m}^2}$$

Remarque : On pouvait se contenter de faire remarquer qu'il était possible, la dérivée du terme $\left(1 - \frac{BK}{R_2} \right)^{-0,0139}$ autour de $R_2 = 670\text{k}\Omega$ étant très faible ($\approx 5 \times 10^{-9}$), de remplacer ce terme par sa valeur, soit 1,0029.

C-23 Soit a_2 la longueur du côté du carré de poly2. Pour $C_2 = 30,2$ pF, on a (Cf. C-4) :

$$a_2 = \frac{\sqrt{0,16 + 1,77 C} - 0,4}{1,77} = 130,4 \mu m$$

En utilisant les formules établies à la question C-14, on obtient :

$$R_1 = 15,4 k\Omega \Rightarrow \boxed{k_1 = 3} \quad \boxed{h_1 = 25,4 \mu m} \quad \boxed{l_1 = 17 \mu m}$$

$$R_2 = 662 k\Omega \Rightarrow \boxed{k_2 = 21} \quad \boxed{h_2 = 134 \mu m} \quad \boxed{l_2 = 125 \mu m}$$

Les équations établies en C-6 permettent de calculer les valeurs min, typ et max de C_2 . On utilise les formules de C-16 pour calculer les valeurs min, typ et max de R_1 et R_2 .

Cf. Document réponse 8.

Remarque : pour les deux dernières lignes du tableau, il faut tenir compte du fait que les dispersions de R_1 et R_2 sont corrélées (les deux résistances étant fabriquées en même temps)

C-24 R_2 varie de $490k\Omega$ à $870k\Omega$ Il est donc nécessaire de faire varier C_2 entre :

$$\boxed{\frac{20 \times 10^{-6}}{870 \times 10^3} = 23 pF} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{20 \times 10^{-6}}{490 \times 10^3} = 41 pF}$$

C-25 (a) La variation relative de $R_2 C_2$ en fonction de n est maximale quand C_2 est minimale. Il s'ensuit :

$$1,1 C_X \leq 0,05 \times 23 \times 10^{-12} \Rightarrow \boxed{C_X \leq 1,04 pF}$$

(b) Il faut satisfaire aussi : $\boxed{1,1 A C_X \leq 23 \times 10^{-12}}$ et $\boxed{0,9 C_X (A + 2^N - 1) \geq 41 \times 10^{-12}}$

(c) Les deux contraintes précédentes peuvent se réécrire :

$$A \leq \frac{23 \times 10^{-12}}{1,1 C_X} \quad \text{et} \quad 2^N - 1 \geq \frac{41 \times 10^{-12}}{0,9 C_X} - A$$

En combinant ces deux expressions on obtient :

$$2^N - 1 \geq \frac{\left(\frac{41}{0,9} - \frac{23}{1,1}\right) \times 10^{-12}}{C_X} \geq \frac{24,64}{1,04} \Rightarrow \boxed{2^N - 1 \geq 23,7 \Rightarrow N \geq 5}$$

Du fait que la minimisation de N est une priorité, on prendra $\boxed{N = 5}$

(d) Les trois contraintes à satisfaire sont alors :

(1) $C_X \leq 1,04 \times 10^{-12}$ Si on représente ces trois contraintes dans le plan (A, C_X) , on voit clairement que la plus grande valeur entière de A les satisfaisant est l'entier immédiatement inférieur à a , solution du système :

(2) $A \leq \frac{23 \times 10^{-12}}{1,1 C_X}$

(3) $A \geq \frac{41 \times 10^{-12}}{0,9 C_X} - 31$

$$\begin{cases} 1,1 a C_X = 23 \times 10^{-12} \\ 0,9(a + 31) C_X = 41 \times 10^{-12} \end{cases} \quad \boxed{a = 26,3}$$

On prendra donc : $\boxed{A = 26}$

(e) En reportant la valeur de A dans les contraintes (2) et (3) on obtient :

$$\boxed{0,799 pF \leq C_X \leq 0,804 pF}$$

(f) On obtient donc :

$$\boxed{A = 26} \quad \boxed{N = 5} \quad \boxed{C_X = 0,8 pF}$$

Pour s'assurer que l'objectif est atteint, on a récapitulé dans le tableau ci-contre les valeurs extrêmes que l'on peut obtenir pour C_2 suivant que C_X a sa valeur maximale ou sa valeur minimale.

C_2	min	max
$C_X = 0,72 pF$	18,72	41,04
$C_X = 0,88 pF$	22,88	50,16

C-26 C_2 sera réalisée sous la forme de 57 capacités de 0,8 pF. Les 26 premières seront connectées en parallèle et formeront la partie fixe de la capacité. Chacune des 31 autres sera connectée en série avec un interrupteur (porte de transmission CMOS). Les 31 branches ainsi formées étant ensuite connectées en parallèle sur la partie fixe de la capacité.

En utilisant les formules établies à la question C-4, on détermine les dimensions a_1 et a_2 de la capacité C_X : $a_1 = 24,2 \mu m$ $a_2 = 21,2 \mu m$, soit une surface $S = a_1^2 \approx 586 \mu m^2$

Avec ces dimensions, on aura : $0,73 pF \leq C_X \leq 0,9 pF$

La surface totale occupée par la capacité C_2 sera donc $S_T = 57 \times 586 \approx 33400 \mu m^2$, sans compter la batterie d'interrupteurs et la logique de commutation.

C-27 Les résistances R_2 et R_1 étant fabriquées simultanément, on peut considérer que leur rapport reste constant : $\alpha = \frac{R_2}{R_1} \approx 44$. Il s'ensuit que le gain de l'étage $K = \frac{R_2}{R_1 + R_m}$ où R_m est la résistance interne du microphone, peut s'exprimer sous la forme $K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{R_m}{R_2}}$. Les échantillons de

microphone et de circuit intégré étant pris quelconques, il n'y a pas de corrélation entre R_m et R_2 . Il s'ensuit que le rapport R_m/R_2 est maximum quand R_m est maximum et R_2 minimum. Ce rapport est minimum dans le cas inverse. On obtient donc :

$$\left(\frac{R_m}{R_2}\right)_{\min} = \frac{2}{870} = 2,3 \times 10^{-3} ; \left(\frac{R_m}{R_2}\right)_{\max} = \frac{6}{490} = 12,2 \times 10^{-3} \Rightarrow \begin{cases} K_{\min} = 28,6 \\ K_{\max} = 40 \end{cases}$$

C-28 Pour respecter la constante de temps de 1,6 ms par excès, il faut que :

$$(R_{1_{\min}} + R_{m_{\min}}) C_{1_{\min}} = 1,6 ms \quad \text{soit} \quad C_{1_{\min}} = 124 nF.$$

Comme il n'y a pas de contraintes particulières sur C_1 , on pourra choisir une capacité film plastique à 20% de valeur nominale $C = 1,2 \times 124 = 150 nF$

Étude du bruit dans l'étage d'entrée.

C-29 $P_d(f_1, f_2) = |f_2 - f_1| \Phi_{TH} = KT |f_2 - f_1|$

C-30 Il n'est pas nécessaire de redémontrer qu'une source de résistance interne R fournit le maximum de puissance à une résistance R_{ext} quand ces deux résistances sont égales. Il s'ensuit que la puissance maximale de bruit qui peut être fournie par une résistance de valeur R est :

$$P_{\max} = \frac{e_{br}^2}{4R} \text{ on sait par ailleurs que } P_{\max} = KT \Delta f$$

Il s'ensuit donc : $e_{br} = \sqrt{4KTR \Delta f}$

Dans l'amplificateur opérationnel.

C-31 Le bruit produit par l'amplificateur opérationnel n'est pas parfaitement blanc. Il possède une composante de bruit de scintillation (bruit en 1/f). La valeur correspondant à une fréquence élevée permet de caractériser la composante de bruit blanc, tandis que la valeur correspondant à une fréquence basse caractérise le bruit en 1/f.

C-32 $a = e_n^2 @ 100 kHz$ $b = 10 (e_n^2 @ 10 Hz - a)$ Cf. aussi document réponse 9.

C-33 Le rapport b/a correspond à la fréquence où les contributions du bruit blanc et du bruit de scintillation produits par l'amplificateur sont de valeurs efficaces identiques.

Représentation sur un même diagramme semi-logarithmique des valeurs de $20 \log_{10}(en)$ en fonction de la fréquence (10 Hz à 100 kHz) pour les six amplificateurs précédents (échelle horizontale : 4 cm / module ; échelle verticale : 4 cm / 10 dB) : fig. solution 2.

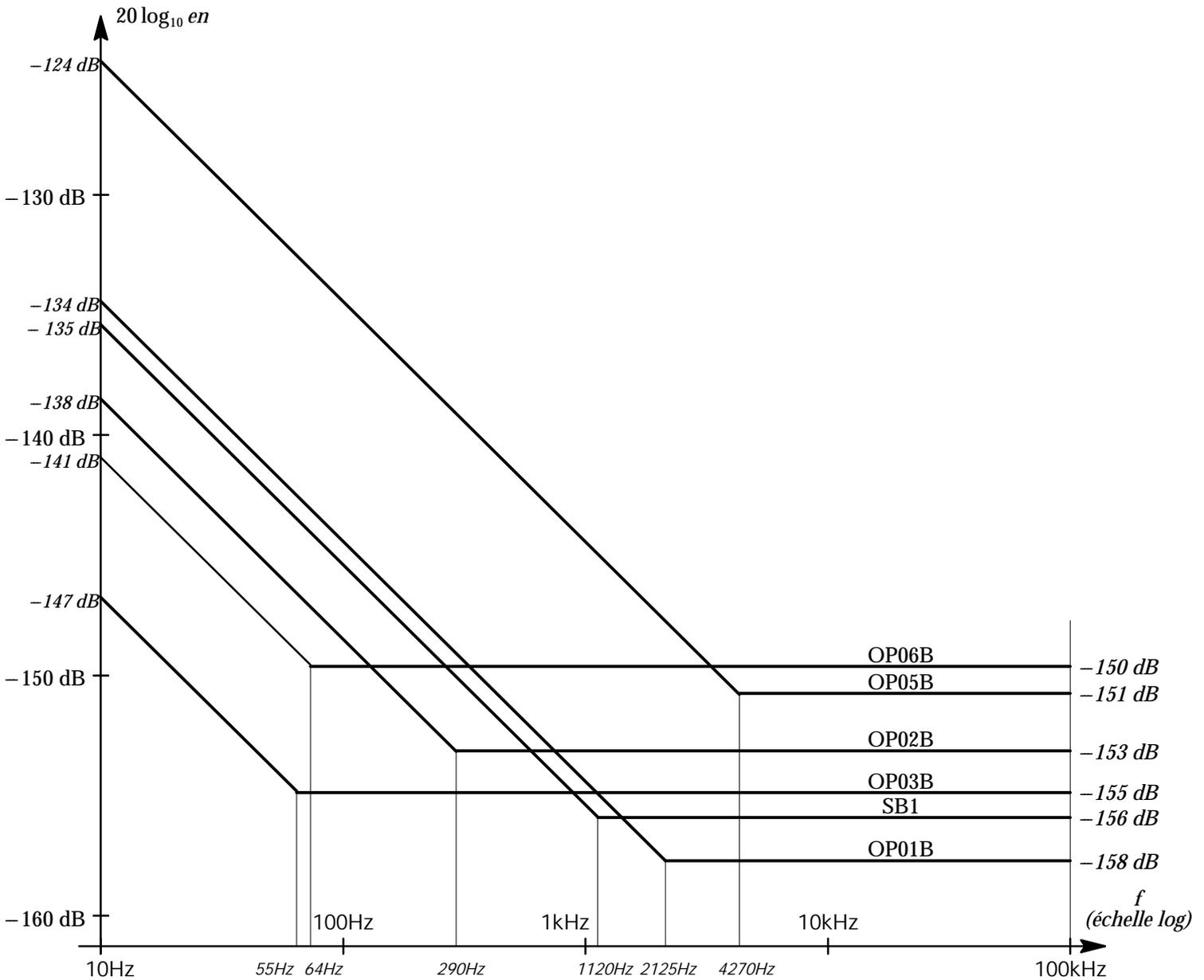


fig. solution 2 : densité spectrale de tension de bruit pour chacun des AOP (question C-33)

$$\text{C-34 } e_{br1}^2 = 4 K T R_1 \text{ et } S_{V_{SR1}} \left(f = \frac{\omega}{2\pi} \right) = 4 K T R_1 \left| \frac{\frac{R_2}{1 + j R_2 C_2 \omega}}{1 + j (R_1 + R_m) C_1 \omega} \frac{1}{j C_1 \omega} \right|^2$$

$$S_{V_{SR1}}(f) = 4 K T R_1 \frac{\left(\frac{f}{f_3}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2\pi (R_1 + R_m) C_1} = 100 \text{ Hz} \\ f_2 &= \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 8 \text{ kHz} \\ f_3 &= \frac{1}{2\pi R_2 C_1} = 1,6 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$e_{br2}^2 = 4 K T R_2 \text{ et } S_{V_{SR2}} \left(f = \frac{\omega}{2\pi} \right) = 4 K T R_2 \left| \frac{1}{1 + j R_2 C_2 \omega} \right|^2$$

$$S_{V_{SR2}}(f) = 4 K T R_2 \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2}$$

$$V_{R_2}^2 = \int_{50}^{9 \times 10^3} \frac{4 K T R_2}{1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2} df = 4 K T R_2 f_2 \left[\arctan \frac{f}{f_2} \right]_{50}^{9 \times 10^3}$$

$$V_{R_2}^2 = 73,4 \times 10^{-12} V^2 \Rightarrow V_{R_2} = 8,6 \mu V$$

$$V_{R_1}^2 = \int_{50}^{9 \times 10^3} \frac{4 K T R_1 \left(\frac{f}{f_3}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2\right)} df = \frac{4 K T R_1 f_1^2 f_2^2}{f_3^2 (f_1^2 - f_2^2)} \left[f_1 \arctan \frac{f}{f_1} - f_2 \arctan \frac{f}{f_2} \right]_{50}^{9 \times 10^3}$$

$$V_{R_1}^2 = 6,61 \times 10^{-9} V^2 \Rightarrow V_{R_1} = 81,3 \mu V$$

C-35 $S_{V_{SAOP}} \left(f = \frac{\omega}{2\pi} \right) = \left(a + \frac{b}{f} \right) \left| 1 + \frac{j R_2 C_1 \omega}{(1 + j(R_1 + R_m) C_1 \omega)(1 + j R_2 C_2 \omega)} \right|^2$

$$S_{V_{SAOP}}(f) = \left(a + \frac{b}{f} \right) \frac{\left(\frac{f}{f_3}\right)^2 \left[\left(\frac{f_1 f_2 - f^2}{\frac{f_1 f_2}{f_3} f} \right)^2 + \left(1 + \frac{f_3}{f_2} + \frac{f_3}{f_1} \right)^2 \right]}{\left(1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2 \right)}$$

avec $f_1 = \frac{1}{2\pi(R_1 + R_m)C_1} = 100 \text{ Hz}$
 $f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 8 \text{ kHz}$
 $f_3 = \frac{1}{2\pi R_2 C_1} = 1,6 \text{ Hz}$

En remplaçant partiellement f_1 , f_2 et f_3 par leurs valeurs, on obtient :

$$V_{aop}^2 = \int_{50}^{9 \times 10^3} \left(a + \frac{b}{f} \right) \frac{\left(\frac{f}{f_3}\right)^2 \left(\left(\frac{8 \times 10^5 - f^2}{5 \times 10^5 f} \right)^2 + 1,033 \right)}{\left(1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2 \right)} df$$

Il est facile de voir que le rapport $\frac{8 \times 10^5 - f^2}{5 \times 10^5 f}$ est une fonction décroissante de f . Pour $50 \leq f \leq 9000$, ce rapport est compris entre $-0,018$ et $0,032$. Une fois élevée au carré cette quantité est négligeable devant 1,03. On peut donc écrire :

$$V_{aop}^2 \approx 1,03 \int_{50}^{9 \times 10^3} \frac{\left(a + \frac{b}{f} \right) \left(\frac{f}{f_3}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2 \right)} df$$

$$V_{aop}^2 = 1,03 \frac{f_1^2 f_2^2}{f_3^2 (f_1^2 - f_2^2)} \left[a \left(f_1 \arctan \frac{f}{f_1} - f_2 \arctan \frac{f}{f_2} \right) + \frac{b}{2} \ln \frac{f_2^2 + f^2}{f_1^2 + f^2} \right]_{50}^{9 \times 10^3}$$

Soit,

$$V_{aop}^2 = 16013 (1657 a + b)$$

C-36 En termes de bruit, l'amplificateur le plus favorable est OP03B, suivi de très près par OP01B et SB1.

	α	b	V_{aop}^2	V_{aop}
OP01B	169×10^{-18}	359×10^{-15}	$10,2 \times 10^{-9}$	101 μ V
OP02B	484×10^{-18}	139×10^{-15}	$15,1 \times 10^{-9}$	123 μ V
OP03B	324×10^{-18}	$17,9 \times 10^{-15}$	$8,9 \times 10^{-9}$	94 μ V
OP05B	841×10^{-18}	3592×10^{-15}	$79,8 \times 10^{-9}$	283 μ V
OP06B	1089×10^{-18}	70×10^{-15}	30×10^{-9}	173 μ V
SB1	256×10^{-18}	286×10^{-15}	$11,4 \times 10^{-9}$	107 μ V
unité	V^2/Hz	V^2	V^2	

C-37 A la question A-17 on a trouvé que la densité spectrale de bruit typique en sortie du microphone est $\sqrt{\gamma_m} = 34 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$. Cette source de bruit apparaît en série avec e_{br1} . Sa contribution à la densité spectrale de bruit en sortie se calcule de la même façon. On en déduit alors très rapidement la valeur efficace de la contribution V_m du microphone à la tension de bruit en sortie du montage.

$$V_m^2 = \int_{50}^{9 \times 10^3} \frac{\gamma_m \left(\frac{f}{f_3}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2\right)} df = \frac{\gamma_m f_1^2 f_2^2}{f_3^2 (f_1^2 - f_2^2)} \left[f_1 \arctan \frac{f}{f_1} - f_2 \arctan \frac{f}{f_2} \right]_{50}^{9 \times 10^3}$$

$$V_m^2 = 2,98 \times 10^{-8} \text{ V}^2 \Rightarrow V_m = 172 \mu\text{V}$$

Soit V_b la tension de bruit en sortie du montage. On a :

$$V_b^2 = V_m^2 + V_{R_1}^2 + V_{R_2}^2 + V_{aop}^2 = (29800 + 6570 + 73 + 8900) \times 10^{-12} \text{ V}^2$$

$$\Rightarrow V_b = 213 \mu\text{V}$$

C-38 En A-2, on a trouvé que la tension de sortie du

micro pouvait s'exprimer : $V_{me} = 10^{\frac{P_{SdB} - 134}{20}} \text{ V}$
Par ailleurs, le gain de l'étage d'entrée est de 35 (soit 30 dB).

Le rapport signal sur bruit en sortie de l'étage d'entrée peut donc s'écrire :

$$SNR_{dB} = P_{SdB} - 134 + 30 - 20 \log(213 \times 10^{-6})$$

$$\text{soit, } \boxed{SNR_{dB} = P_{SdB} - 30}$$

fig. solution 3 donne l'évolution de ce SNR en fonction du niveau d'entrée. On y voit clairement que l'objectif est parfaitement atteint. En effet, les signaux sonores au delà de 30 dB "émergent" du bruit.

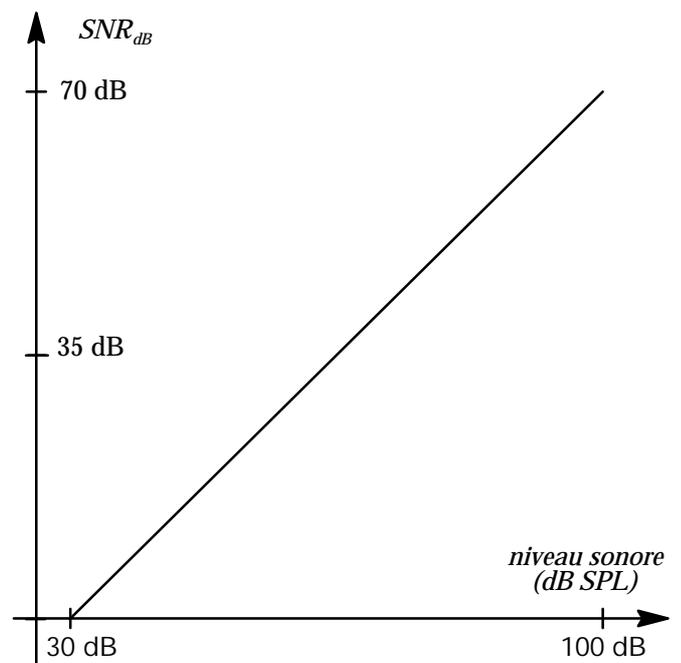


fig. solution 3 : Evolution du SNR en sortie de l'étage d'entrée en fonction du niveau sonore (question C-38)

D– Choix du convertisseur analogique numérique

Choix de la résolution du quantificateur

D-1 fig. solution 4 donne la courbe représentative de $S(V_e)$, fonction de transfert du quantificateur, pour V_e variant de $-6q$ à $6q$, quand $S_{\min} = -3,5$ et $S_{\max} = 3,5$.

D-2 $\boxed{\bar{V}_e = qS}$

D-3 Cf. fig. solution 4

D-4 $\boxed{Q = S_{\max} - S_{\min} + 1}$

D-5 $\boxed{V_{e_{\max}} = q \left(S_{\max} + \frac{1}{2} \right)}$ et $\boxed{V_{e_{\min}} = q \left(S_{\min} - \frac{1}{2} \right)}$

Si $S_{\min} = S_{\max} \Rightarrow V_{e_{\min}} = -V_{e_{\max}}$

$\boxed{q = \frac{V_{e_{\max}}}{2^{N-1}}}$

D-6 La densité de probabilité $p(v)$ du bruit de quantification et sa fonction de répartition sont représentées fig. solution 5.

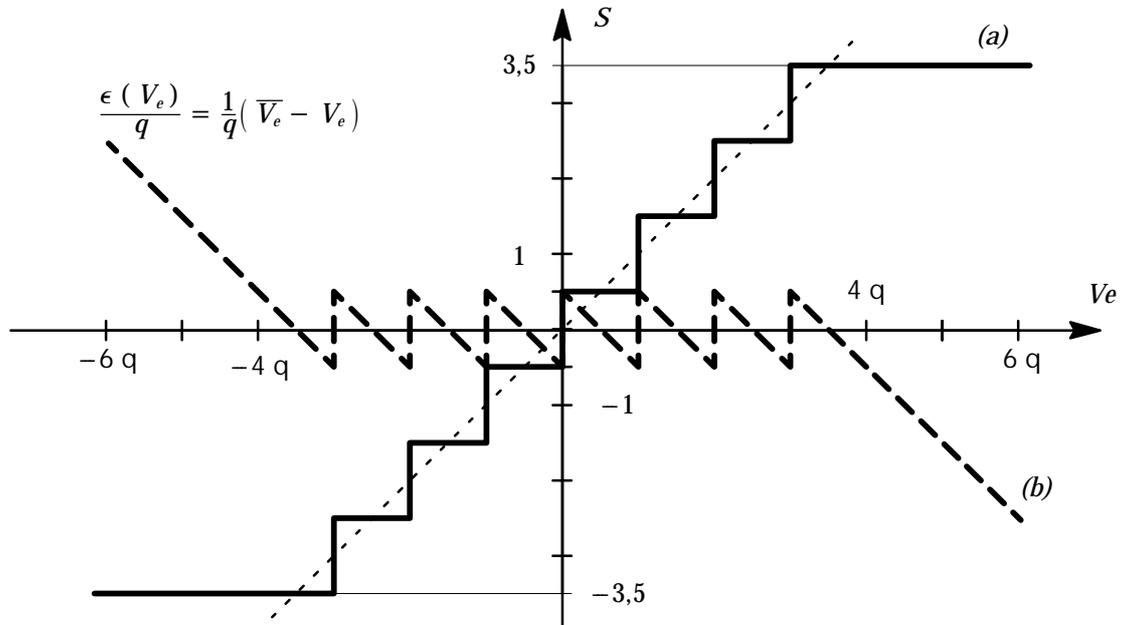


fig. solution 4 : (a) fonction de transfert du quantificateur (question D-1)
(b) erreur de quantification (question D-3)

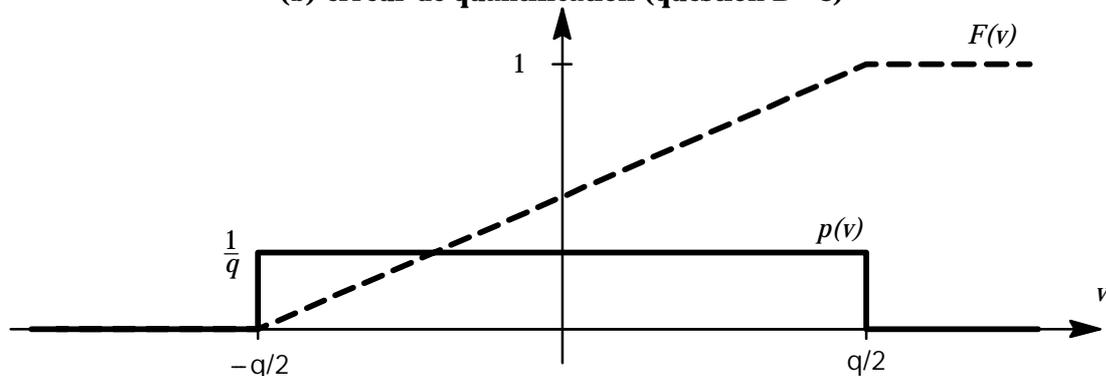


fig. solution 5 : densité de probabilité $p(v)$ et fonction de répartition $F(v)$
du bruit de quantification (question D-6)

D-7

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b^2(t) dt$$

On peut interpréter cette intégrale comme la valeur moyenne du carré de $b(t)$ qui n'est autre que son espérance mathématique qui s'exprime aussi :

$$P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} p(b) b^2 db$$

D-8
$$P_{bq} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(v) v^2 dv = \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} \frac{v^2}{q} dv = \left[\frac{v^3}{3q} \right]_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}}$$

$$P_{bq} = \frac{q^2}{12}$$

Evolution du rapport signal/bruit

D-9
$$RSBQ_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P(V_e)}{P_{bq}} = 10 \log_{10} \frac{\frac{V_m^2}{2}}{\frac{q^2}{12}} = 10 \log_{10} 12 + 20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{q}$$

Soit
$$RSBQ_{dB} = 10,8 + 20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{q}$$

D-10 En exploitant le dernier résultat de la question D-5, on obtient :

$$RSBQ_{dB} = 10,8 + 20 \log_{10} \frac{2^{N-1} V_{eff}}{V_{emax}} = 10,8 - 6,02 + 6,02N + 20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}}$$

soit
$$RSBQ_{dB} = 4,77 + 6,02N + 20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}}$$

Avec $N = 8$, on obtient :
$$RSBQ_{dB} = 53 + 20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}}$$

D'où le tracé ($N=8$) sur le document réponse 10.

Limites de validité :

– **limite haute** : au delà de $V_{eff} = \frac{V_{emax}}{\sqrt{2}}$, soit $\left(\frac{V_{eff}}{V_{emax}} \right)_{dB} > -3 \text{ dB}$, l'erreur de quantification n'est plus bornée entre $-q/2$ et $q/2$ et les calculs précédents ne sont plus valables.

– **limite basse** : quand V_m devient du même ordre de grandeur que q , il n'est plus possible de considérer l'erreur de quantification comme une fonction aléatoire indépendante du signal d'entrée. Cette limite reste cependant très floue. Pour essayer de la préciser, appelons α la valeur minimale "acceptable" du rapport de V_m au pas de quantification q . On montre très facilement que :

$$\frac{V_m}{q} > \alpha \Leftrightarrow \left(\frac{V_{eff}}{V_{emax}} \right)_{dB} > 3 - 6,02N + 20 \log_{10} \alpha$$

De ce résultat, il est alors facile de déduire une borne minimale du rapport signal sur bruit de quantification en fonction de α :

$$RSBQ_{dB \text{ min}} = 4,77 + 6,02N + 3 - 6,02N + 20 \log_{10} \alpha = 7,77 + 20 \log_{10} \alpha$$

Cette limite basse a été représentée sur le document réponse 10 pour $\alpha=1$ et $\alpha=2$.

D-11 Quand N varie, la "courbe" se déplace verticalement. Les limites déterminées précédemment sont indépendantes de N . Cf. courbes ($N=4$) et ($N=12$) du document réponse 10.

D-12

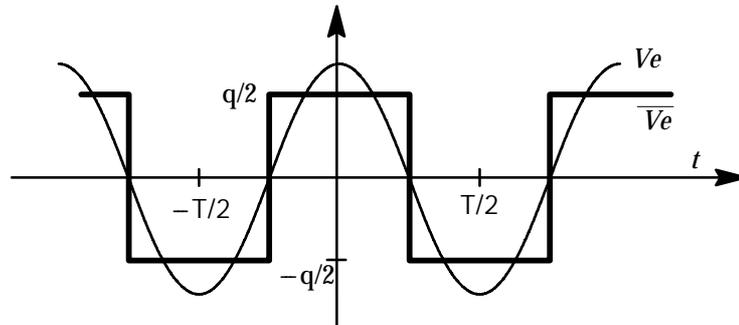


fig. solution 6 : Allure de $\overline{V_e}$ pour $V_e(t) = V_m \cos \omega t$ quand $0 < V_m < q$ (question D-12)

D-13 Pour $0 < V_m < q$

$$U_1 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \overline{V_e} \cos \omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{4}} q \cos \omega t dt = \frac{2}{\pi} q$$

$$U_{eff} = \frac{q}{2}$$

D-14

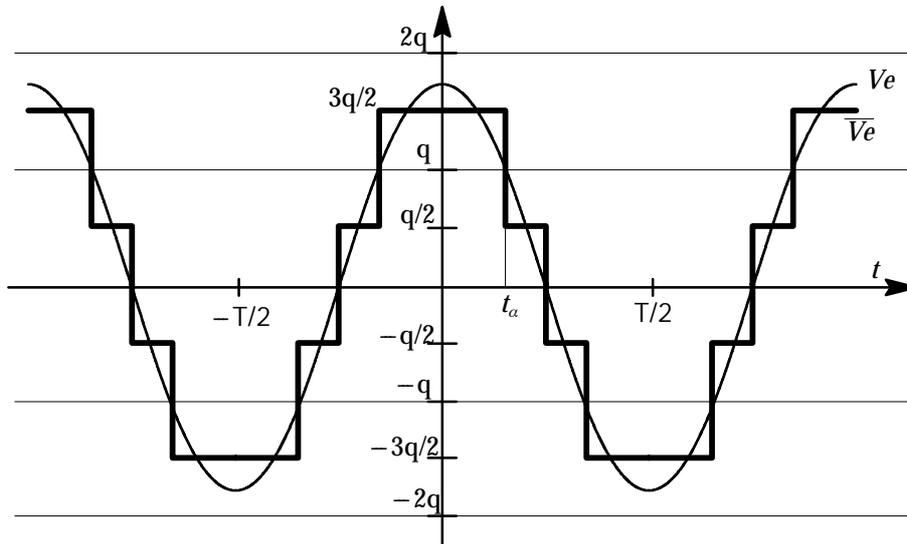


fig. solution 7 : Allure de $\overline{V_e}$ pour $V_e(t) = V_m \cos \omega t$ quand $q < V_m < 2q$ (question D-14)

Posons $t_\alpha = \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{q}{V_m}$ Il vient, pour $q < V_m < 2q$:

$$U_1 = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \overline{V_e} \cos \omega t dt = \frac{8}{T} \left[\int_0^{t_\alpha} \frac{3q}{2} \cos \omega t dt + \int_{t_\alpha}^{\frac{T}{4}} \frac{q}{2} \cos \omega t dt \right]$$

$$U_1 = \frac{2q}{\pi} \left(1 + 2 \sin \arccos \frac{q}{V_m} \right) = \frac{2q}{\pi} \left[1 + 2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{V_m^2}} \right]$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \overline{V_e}^2 dt} = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{t_\alpha} \frac{9q^2}{4} dt + \frac{4}{T} \int_{t_\alpha}^{\frac{T}{4}} \frac{q^2}{4} dt}$$

$$U_{eff} = q \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi} \arccos \frac{q}{V_m}}$$

D-15 Posons $t_\alpha = \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{q}{V_m}$ et $t_\beta = \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{2q}{V_m}$ Il vient, pour $2q < V_m < 3q$:

$$U_1 = \frac{8}{T} \left[\int_0^{t_\beta} \frac{5q}{2} \cos \omega t dt + \int_{t_\beta}^{t_\alpha} \frac{3q}{2} \cos \omega t dt + \int_{t_\alpha}^{\frac{T}{4}} \frac{q}{2} \cos \omega t dt \right]$$

$$U_1 = \frac{2q}{\pi} \left(1 + 2 \sin \arccos \frac{q}{V_m} + 2 \sin \arccos \frac{2q}{V_m} \right)$$

$$U_1 = \frac{4q}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{q^2}{V_m^2}} + \sqrt{1 - \left(\frac{2q}{V_m} \right)^2} \right] \quad (\text{pour } 2q < V_m < 3q)$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{q^2}{T} \left([5^2 t]_0^{t_\beta} + [3^2 t]_{t_\beta}^{t_\alpha} + [t]_{t_\beta}^{\frac{T}{4}} \right)}$$

$$U_{eff} = q \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi} \arccos \frac{q}{V_m} + \frac{8}{\pi} \arccos \frac{2q}{V_m}} \quad (\text{pour } 2q < V_m < 3q)$$

En généralisant, on obtient :

$$U_1 = \frac{4q}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\frac{V_m}{q}} \sqrt{1 - \left(\frac{nq}{V_m} \right)^2} \right]$$

$$U_{eff} = q \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\frac{V_m}{q}} n \arccos \frac{nq}{V_m}}$$

D-16 Soit un signal U, de valeur moyenne nulle décomposé en série de Fourier :

$$U = U_1 \sin(\omega t + \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

Sa valeur efficace se calcule :

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[U_1 \sin(\omega t + \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n) \right]^2 dt$$

soit :

$$U_{eff}^2 = \frac{U_1^2}{2} + U_h^2 + \frac{2}{T} \int_0^T U_1 \sin(\omega t + \phi) \times \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n) dt$$

or, $\int_0^T \sin(\omega t + \phi) \sin(n\omega t + \phi_n) dt = 0$ pour $n \neq 1$. Il s'ensuit :

$$U_{eff}^2 = \frac{U_1^2}{2} + U_h^2 \quad \text{soit} \quad U_h^2 = U_{eff}^2 - \frac{U_1^2}{2}$$

D-17

$$RSBQ_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\frac{U_1^2}{2}}{U_{eff}^2 - \frac{U_1^2}{2}} = -10 \log_{10} \left(2 \frac{U_{eff}^2}{U_1^2} - 1 \right)$$

soit :

$$RSBQ_{dB} = -10 \log_{10} \left[\frac{\pi^2}{8} \frac{1 + \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\frac{V_m}{q}} n \arccos \frac{nq}{V_m}}{\left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{V_m}{q}} \sqrt{1 - \left(\frac{nq}{V_m} \right)^2} \right]^2} - 1 \right]$$

D-18 Les points de rebroussement de la courbe du document réponse 11 correspondent aux valeurs entières du rapport V_m/q . Pour déterminer l'échelle verticale, il suffit donc de calculer $RSBQ_{dB}$ pour les valeurs de V_m multiples de q :

V_m	$< q$	q	$2q$	$3q$	$4q$	$5q$	$6q$	$7q$	$8q$	$9q$	$10q$
$(V_{eff}/V_{emax})_{dB}$		-45,2	-39,1	-35,6	-33,1	-31,2	-29,6	-28,2	-27,1	-26,1	-25,1
$RSBQ_{dB}$	6,3	6,3	13,3	17	19,5	21,5	23,1	24,4	25,6	26,6	27,5

Entre le premier point de rebroussement et le dixième, on trouve une différence de hauteur de 8,7 cm. L'échelle verticale est donc de $(27,5 - 6,3)/8,7 = \boxed{2,43 \text{ dB/cm}}$

L'évolution de $RSBQ_{dB}$ telle qu'elle est prévue par l'expression établie à la question D-9 est représentée par le trait gras.

On peut conclure que les résultats dégagés en D-9 restent valables pour les faibles niveaux, à condition d'ajouter une valeur "plancher" à 6.3 dB pour le rapport signal sur bruit de quantification.

D-19

$$RSBE_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{E_{beff}}$$

D-20

$$RSB_{dB} = 10 \log_{10} \frac{V_{eff}^2}{E_{beff}^2 + P_{bq}}$$

$$RSB_{dB} = 10 \log_{10} \frac{V_{eff}^2 V_{emax}^2}{V_{emax}^2 (E_{beff}^2 + P_{bq})} = 20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}} - 10 \log_{10} \left(\frac{E_{beff}^2}{V_{emax}^2} + \frac{P_{bq}}{V_{emax}^2} \right)$$

$$\text{Or, } P_{bq} = \frac{q^2}{12} = \frac{V_{emax}^2}{12 \times 2^{2(N-1)}}$$

$$\text{Donc : } RSB_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}} - 10 \log_{10} \left[\frac{E_{beff}^2}{V_{emax}^2} + \frac{1}{12 \times 2^{2(N-1)}} \right]$$

Cf. le **document réponse 12** pour les expressions de RSB_{dB} et $RSBQ_{dB}$ en fonction de $(V_{eff}/V_{emax})_{dB}$, pour les 3 valeurs de N , si l'on considère que $(E_{beff}/V_{emax})_{dB} = -60 \text{ dB}$.

D-21 Cf. document réponse 10.

D-22 La droite (a) du document réponse 13, représente l'évolution du rapport signal sur bruit en entrée du quantificateur, $RSBE_{dB}$, quand V_{eff} varie. La ligne brisée (b) représente la valeur minimale de $RSBQ_{dB}$ pour que le rapport signal sur bruit RSB_{dB} en sortie du quantificateur soit au moins égal à 40 dB quand $RSBE_{dB} > 43$ dB et à $RSBE_{dB} - 3$ dB ailleurs. Explication : quand $RSBE_{dB}$ est plus petit que 40 dB, $RSBQ_{dB}$ doit être au moins égal à $RSBE_{dB}$ pour que la dégradation du rapport signal sur bruit ne soit pas supérieure à 3 dB ; quand $RSBE_{dB}$ est supérieur à 43 dB, il suffit que $RSBQ_{dB}$ soit supérieur à 40 dB pour que le rapport signal sur bruit en sortie soit lui aussi supérieur à 40 dB.

D-23 $V_{mmax} = 1$ V.

Du fait que l'on ne connaît pas encore V_{emax} , on prend $(E_{beff}/V_{mmax})_{dB} = -60$ dB, soit $E_{beff} = 1$ mV.

(a) $P_{bq} = \frac{q^2}{12} < E_{beff}^2 = 10^{-6}$ soit $q < q_{max} = \sqrt{12} \times 10^{-3} = 3,4$ mV

(b) $Q = 2 \frac{V_{emax}}{q} \Rightarrow Q_{min} = 2 \frac{(V_{emax})_{min}}{q_{max}}$

soit $Q_{min} = 2 \frac{V_{mmax}}{q_{max}} = 588 = 2^{9,2}$ et $N = 10$ bits

(c) Sachant que $q = \frac{V_{emax}}{2^{N-1}}$, si l'on s'impose $\frac{q_{max}}{q} = \frac{V_{emax}}{V_{mmax}}$ on obtient :

$$V_{emax} = \sqrt{q_{max} \times 2^{N-1} \times V_{mmax}} = \sqrt{512 \times 3,4 \times 10^{-3}} = 1,32$$
 V

et $q = \frac{V_{emax}}{512} = 2,6$ mV

E– Étude du convertisseur analogique numérique

E-1

$$\begin{aligned}
 R_1 &= V_{in} \\
 R_2 &= 2 V_{in} - b_1 V_{ref} \\
 R_3 &= 4 V_{in} - (2 b_1 + b_2) V_{ref} \\
 R_4 &= 8 V_{in} - (4 b_1 + 2 b_2 + b_3) V_{ref} \\
 R_5 &= 16 V_{in} - (8 b_1 + 4 b_2 + 2 b_3 + b_4) V_{ref}
 \end{aligned}$$

E-2

$$V_{in} = \frac{R_{N+1}}{2^N} + \left[\sum_{k=1}^N 2^{-k} b_k \right] V_{ref}$$

soit

$$\frac{V_{in}}{V_{ref}} = \left[\sum_{k=1}^N 2^{-k} b_k \right] + \frac{R_{N+1}}{2^N V_{ref}}$$

D'où il est clair que la suite des b_i est une représentation numérique de V_{in} / V_{ref} . Le terme supplémentaire représente l'erreur de quantification.

Les valeurs extrêmes du rapport V_{in} / V_{ref} sont :

$$\left(\frac{V_{in}}{V_{ref}} \right)_{\max} = \left[\sum_{k=1}^N 2^{-k} \right] \approx 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{V_{in}}{V_{ref}} \right)_{\min} = \left[\sum_{k=1}^N -2^{-k} \right] \approx -1$$

E-3 Non, cette application n'est pas bijective, mais surjective car deux suites de b_i distinctes peuvent donner la même valeur. Par exemple :

Si la suite /0/-1/ donne $-2^{-2} = -0,25$

Si la suite /-1/1/ donne $-2^{-1} + 2^{-2} = -0,5 + 0,25 = -0,25$ encore.

E-4 Il y aura divergence si $|R_i|$ croît sans autre limite que l'indice i .

Il est donc nécessaire d'avoir, à tout instant, $|R| < V_{ref}$

Il s'ensuit que $-V_{ref} < V_{\min} < V_{\max} < V_{ref}$

Ensemble K1, C1, K2, K3, A1

E-5 Cf. document réponse 14.

E-6

$$\begin{aligned}
 V_{C1ib} &= V_{X'ib} \\
 V_{Xib} &= 0 \\
 V_{C1ia} &= V_{C1(i-1)b} = V_{X'(i-1)b} \\
 V_{Xia} &= V_{C1ia} = V_{X'(i-1)b}
 \end{aligned}$$

E-7 Il s'agit d'un échantillonneur bloqueur avec retour de la sortie à zéro pendant la phase d'échantillonnage.

Ensemble K5, K7, K8, C3, C2, K4, C4, A2

E-8 Cf. document réponse 15.

E-9

$$\begin{aligned}
 V_{C2ia} &= V_{Xia} \\
 V_{C3ia} &= -V_{ref} \\
 V_{C4ia} &= 0
 \end{aligned}$$

E-10 $V_{Xib} = V_{Yib} = V_Z = 0$

Il s'ensuit que $V_{C2ib} = V_{C3ib} = 0$

La charge présente dans les capacités C_2 et C_3 au début de la phase b a été entièrement transférée dans C_4 car, au cours de cette phase, il n'existe aucun chemin de conduction entre le noeud Z et la masse. On peut donc écrire :

$$V_{C4ib} = - \frac{C_3 V_{C3ia} + C_2 V_{C2ia}}{C_4} \text{ soit } V_{C4ib} = \frac{C_3 V_{ref} - C_2 V_{Xia}}{C_4}$$

d'où l'on déduit : $V_{X'ib} = - V_{C4ib} = \frac{C_2}{C_4} V_{Xia} - \frac{C_3}{C_4} V_{ref}$

E-11 $V_{X'ib} = 2 V_{Xia} - V_{ref}$

E-12 $V_{X'ib} = 2 V_{Xia} + V_{ref}$ (si l'on avait fermé $K7$ au lieu de $K8$ dans la phase a)

E-13 $V_{X'ib} = 2 V_{Xia}$ (si l'on avait fermé $K5$ au lieu de $K7$)

Ensemble CP1, CP2

E-14 Cf. document réponse 16.

Fonctionnement de l'ensemble de la partie opérative.

E-15 La conversion dure 13 cycles. Le résultat de la comparaison du reste R ($V_{X'}$), élaboré pendant le cycle i, avec V_{min} et V_{max} est disponible sur Q_{bo}/Q_{boo} pendant le cycle i+1. En se reportant au document réponse 16 on peut établir la table suivante :

$Q_{b^o ia}$	$Q_{b^{oo} ia}$	$V_{X'(j-1)a}$	b_{j-1}
0	0	$V_{min} < V_{X'(j-1)a} < V_{max}$	0
0	1	$V_{X'(j-1)a} < V_{min} < V_{max}$	-1
1	0	$V_{min} < V_{max} < V_{X'(j-1)a}$	1
1	1	impossible	

En exploitant cette table, on construit très facilement les deux séquences :

indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
seq 1	1	1	1	0	-1	1	0	-1	0	1	0	0	0
seq 2	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	1	0

En appliquant la formule établie en E-2, on obtient :

$$V_{in} \approx V_{ref} \left(\sum_{k=1}^N 2^{-k} b_k \right)$$

$$V_{in1} = V_{ref} (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-5} + 2^{-6} - 2^{-8} + 2^{-10}) = 0,8564453125$$

$$V_{in2} = V_{ref} (2^{-6} - 2^{-7} + 2^{-10} - 2^{-11} + 2^{-12}) = 0,008544921875$$

E-16 En appliquant l'algorithme de conversion aux deux valeurs précédentes, on reconstitue la suite des V_{Xp} :

indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$V_{Xp 1}$	0,85	0,71	0,43	-0,15	-0,30	0,41	-0,19	-0,37	0,25	0,5	0 ?	0 ?	0 ?
$V_{Xp 2}$	0,01	0,02	0,03	0,07	0,14	0,27	-0,45	0,09	0,19	0,37	-0,25	0,5	0 ?

E-17 En comparant les valeurs successives de V_{Xp} aux décisions prises par les comparateurs, on peut déduire une suite d'encadrements de V_{\min} et V_{\max} :

sequence 1	sequence 2	
$V_{\max} < 0,85$	$V_{\max} > 0,14$	
$V_{\max} < 0,71$	$V_{\max} < 0,27$	
$V_{\max} < 0,43$	$V_{\min} > -0,45$	$V_{\max} < 0,27$ $V_{\max} > 0,25$ $V_{\min} < -0,19$ $V_{\min} > -0,25$
$V_{\min} < -0,15$	$V_{\max} > 0,09$	
$V_{\min} > -0,30$	$V_{\max} > 0,25$	
$V_{\max} < 0,41$	$V_{\max} > 0,19$	
$V_{\min} < -0,19$	$V_{\max} > 0,19$	
$V_{\min} > -0,37$	$V_{\max} < 0,37$	
$V_{\max} > 0,25$	$V_{\min} > -0,25$	
$V_{\max} < 0,5$	$V_{\max} < 0,5$	

Les valeurs utilisées pour construire les chronogrammes étaient :

$$V_{in1} = 0,8564 \text{ V} ; V_{in2} = 0,008564 \text{ V} ; V_{\min} = -0,2 \text{ V} ; V_{\max} = 0,25 \text{ V}$$

Partie contrôle.

E-18 La première remarque à faire concerne les états X de la sortie K1. Ces états indéterminés correspondent à des combinaisons état-entrées qui ne sont pas décrites dans le chronogramme énoncé. Ils peuvent être recopiés dans toutes les autres cases correspondant à la même combinaison état-entrées. Le reste de la table d'états s'établit simplement par inspection du chronogramme donné dans l'énoncé.

Cf. document réponse 17.

Une remarque sur la transition 11 de l'état 8 : compte tenu des hypothèses contenues dans la question, cette transition peut rester indéterminée. Les réponses 9, 1 ou 8 sont acceptables, mais seule la valeur 1 permet une bonne minimisation de la machine.

E-19 Règle 1 : Deux états sont équivalents si, pour chaque combinaison d'entrée, ils ont mêmes sorties et même état suivant.

Règle 2 : Les états sont d'abord regroupés en différentes classes selon la valeur des sorties associées (deux états ayant mêmes sorties pour chaque combinaison d'entrée sont dans la même classe). Les états appartenant à une même classe sont équivalents s'ils ne doivent pas être séparés. Or, les états appartenant à une même classe doivent être séparés si les états suivants associés à chacun d'eux sont dans des classes différentes.

Lorsque plusieurs états sont équivalents, il suffit de ne garder qu'un seul représentant par classe d'équivalence et de renommer les états suivants en conséquence.

Par la règle 1, on peut combiner les états 0 et 8. On constate ensuite que, en appliquant cette même règle, on peut fusionner n'importe quel état de l'ensemble { 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 } avec n'importe quel état de l'ensemble { 2, 3, 4, 5, 6, 7 }. On voit cependant que, pour rendre le décodage de l'état suivant le plus indépendant possible de l'entrée init, on aura intérêt à fusionner 1 avec 9, 2 avec 10, 3 avec 11, 4 avec 12, 5 avec 13, 6 avec 14 et 7 avec 15. Le processus peut encore se poursuivre en fusionnant 1 avec 5, 2 avec 6 et 3 avec 7. Aucun autre fusionnement n'est alors possible.

Cf. Document réponse 18.

E-20 Après minimisation, la table d'états se limite à cinq états, qui peuvent donc être codés avec trois variables. Sur les **documents réponse 18 et 19** on a donc noirci les lignes correspondant à l'usage d'une quatrième variable d'état. Les trois lignes grisées ne sont pas utilisées pour coder des états valides de la machine. On peut donc les exploiter pour simplifier les expressions logiques des sorties. Les valeurs indiquées sur ces lignes sont celles qui correspondent aux expressions logiques données ci-dessous (dans lesquelles, afin de simplifier l'écriture, le signe \wedge (ET) a été omis).

$D_0 = \overline{Q_1} (Q_0 \vee phi) \vee Q_1 Q_2 \overline{phi}$	$D_1 = Q_0 \vee Q_1 phi$	$D_2 = \overline{Q_0} Q_1 phi$	$K_1 = \overline{Q_0} \overline{Q_1}$
$K_2 = init (Q_2 \vee Q_0 \overline{Q_1} \overline{phi})$	$K_3 = init \vee Q_0 phi \vee \overline{Q_0} (\overline{Q_2} \overline{phi} \vee \overline{Q_1})$	$K_4 = Q_1 phi$	
$K_{p5} = \overline{Q_0} \overline{Q_2} \overline{phi} \vee \overline{Q_1} \vee Q_0$	$K_6 = init (Q_1 Q_2 \vee Q_0 \overline{Q_1})$	$CK = Q_0 \vee Q_1 (Q_2 \vee phi)$	

E-21 Choix des éléments de mémorisation : il importe de pouvoir mettre la machine dans l'état 0 à la mise sous tension. On utilisera donc la bascule DFE qui possède une entrée de remise à zéro asynchrone (l'entrée de mise à 1 disponible sur DFF serait inutile).

Compte tenu de la forme des expressions logiques donnant les D_i , on a intérêt à utiliser des structures ONxxx. Nous réécrivons donc ces expressions pour les mettre sous la forme OU-ET-NON :

$$D_0 = (\overline{Q_1} \vee \overline{Q_0}) (\overline{Q_1} \vee \overline{phi}) (\overline{Q_1} \vee \overline{Q_2} \vee \overline{phi})$$

$$D_1 = \overline{Q_0} (\overline{Q_1} \vee \overline{phi})$$

$$D_2 = (\overline{Q_0} \vee \overline{Q_1} \vee \overline{phi})$$

On a représenté fig. solution 8 le schéma de la partie "séquenceur" de la machine d'états. A noter la génération de phi par une bascule DFE commandée par H. Il s'agit là d'une conséquence des hypothèses posées dans la question E-18.

E-22 On relève, dans l'annexe 6 les temps de propagation suivants :

ON322 : 1,48 ns ; ON21 : 1,17 ns ; NO3 : 1,17 ns ; IN1 : 1,11 ns.

Par inspection du schéma, on trouve donc les retards suivants :

$phi \rightarrow D_0 : 1,11 + 1,48 = 2,59 \text{ ns}$	$phi \rightarrow D_1 : 1,11 + 1,17 = 2,28 \text{ ns}$	$phi \rightarrow D_2 : 1,11 + 1,17 = 2,28 \text{ ns}$
$Q_i/\overline{Q}_i \rightarrow D_0 : 1,48 \text{ ns}$	$Q_i/\overline{Q}_i \rightarrow D_1 : 1,17 \text{ ns}$	$Q_i/\overline{Q}_i \rightarrow D_2 : 1,17 \text{ ns}$

Le temps à prendre en compte pour la détermination de la période minimale de l'horloge est le temps de propagation maximal d'une sortie de bascule à une entrée (ici 2,59 ns) auquel il faut ajouter le plus grand des retards C→Q/QN des bascules DFE (1,55 ns) et le "min D setup time to C" (0,40 ns). On obtient donc :

$$T_{Hmin} = 2,59 + 1,55 + 0,40 = 4,54 \text{ ns} \text{ soit } F_{Hmax} = 220 \text{ MHz}$$

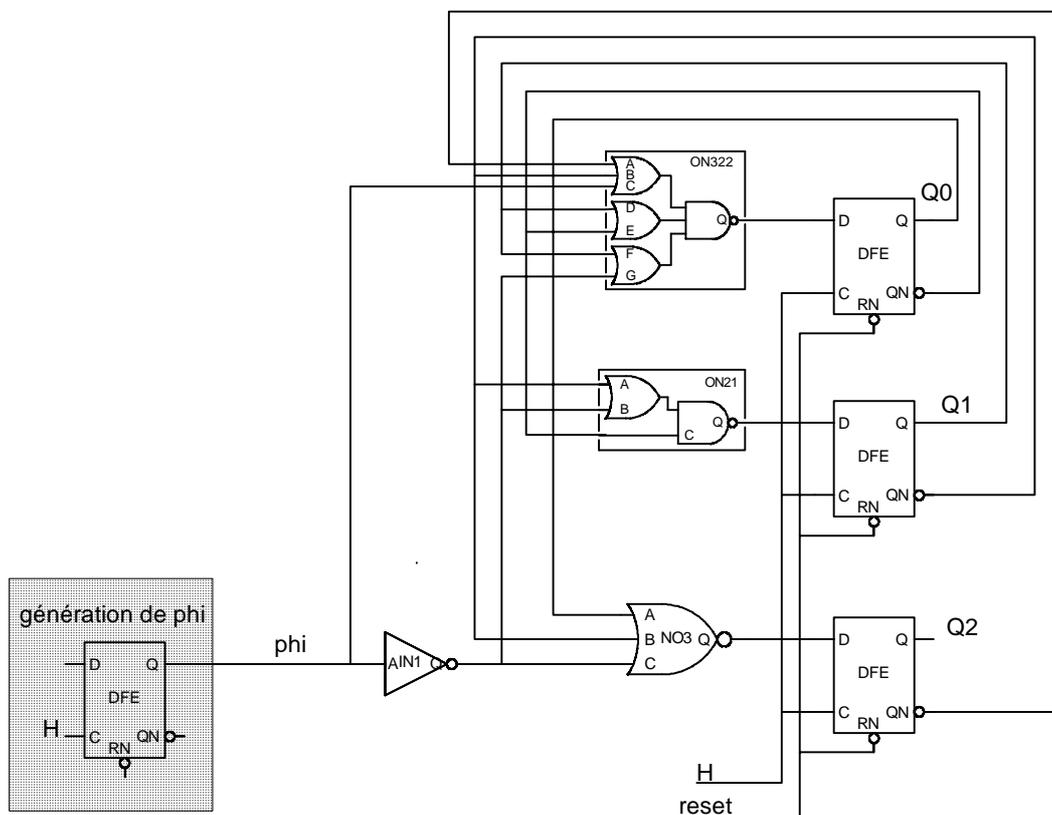


fig. solution 8 : génération des signaux D_i .

E-23 Les chronogrammes donnés en annexe 4 correspondent à une conversion sur 13 bits (Cf. question E-15). On y voit donc que la fréquence de phi doit être 13 fois celle de init, qui correspond à la fréquence d'échantillonnage. On a donc :

$$F_{phi} = 13 \times 320 \text{ kHz} = 4,16 \text{ MHz}$$

Par période de phi, il y a six états instables et 2 états stables. Chaque état instable dure une période de l'horloge. Chaque état stable dure donc au moins trois périodes d'horloge

$$\Rightarrow F_{H_{\min}} = 12 \times F_{phi} = 50 \text{ MHz}$$

Pour calculer la puissance consommée par la partie de machine dessinée fig. solution 8, il faut estimer la puissance consommée par chacun des éléments du schéma. Dans l'annexe 6, on trouve: IN1: 3.33^{μW}/MHz; NO3: 5.01^{μW}/MHz; ON21: 4.13^{μW}/MHz; ON322: 7.39^{μW}/MHz; DFE: 19.52^{μW}/MHz; On peut considérer que chaque élément du schéma travaille à la fréquence F_H , sauf IN1 qui fonctionne à la fréquence F_{phi} . On obtient donc :

$$P = 50 (7,39 + 4,13 + 5,01 + 3 \times 19,52) + 4,16 \times 3,33 = 3,77 \text{ mW} \text{ et}$$

$$I = \frac{P}{5} = 750 \mu A$$

En partant sur un temps de fonctionnement de 8h par jour, un tel courant consommé pendant 15 jours correspond à 90 mAh, c'est à dire à une part beaucoup trop importante de la capacité de la pile disponible...

Partie contrôle, machine d'états asynchrone

E-24 On a indiqué, dans le **document réponse 20**, les valeurs "principales" des variables d'état. Pour chacune de ces 13 combinaisons de sortie, une seule des variables d'état (celle dont le nom est porté dans la case correspondante) peut être à 1. Pour toutes les autres combinaisons de sortie, les variables d'état peuvent être quelconques. Il suffit alors de chercher, pour chaque variable, le regroupement le plus large possible qui n'empiète pas sur une case marquée.

On obtient donc :

$$E_0 = K_1 \overline{CK}$$

$$E_1 = K_1 CK$$

$$E_2 = \overline{K_1} \overline{K_4} Kp_5 CK$$

$$E_3 = K_4 Kp_5$$

$$E_4 = \overline{K_2} K_3 K_4 \overline{Kp_5} \overline{K_6}$$

$$E_5 = K_4 \overline{Kp_5} K_6$$

$$E_6 = \overline{K_4} K_6$$

$$E_7 = K_3 \overline{K_4} \overline{Kp_5} \overline{K_6} CK$$

$$E_8 = \overline{Kp_5} \overline{CK}$$

$$E_9 = \overline{K_1} Kp_5 \overline{CK}$$

$$E_{10} = \overline{K_3} K_4$$

$$E_{11} = K_2 K_3$$

$$E_{12} = K_2 \overline{K_3}$$

$$E_{13} = \overline{K_2} \overline{K_3} \overline{K_4}$$

E-25 K_1 est vrai dans les états 0 et 1. Il faut donc que la sortie K_1 soit à 1 pour toutes les combinaisons état-entrées qui font passer la machine dans l'état 0 ou l'état 1. En examinant la table des phases, on trouve aisément que : $K_1 = E_0 \vee E_9$. Il reste alors à ajouter l'entrée de reset qui doit forcer K_1 à 1 (état 0 de la machine) lorsqu'elle est à 0 :

$$K_1 = E_0 \vee E_9 \vee \overline{reset}$$

En procédant de la même façon pour K_2 on trouve :

$$K_2 = (E_{10} \vee E_{11}) reset$$

Pour K_3 , on a intérêt à considérer les états pour lesquels cette sortie est à 0. On obtient alors :

$$K_3 = \overline{E_4} \overline{init} \vee E_{10} \vee E_{11} \vee \overline{E_{12}} \vee \overline{reset} \quad (\text{Attention, ce résultat est différent de celui qu'on aurait obtenu en considérant les états où } K_3 \text{ est à 1. Aucune des deux solutions n'est optimale, mais on peut espérer avoir des calculs plus simples avec une expression de } K_3 \text{ moins longue.})$$

Pour les autres sorties :

$$K_4 = (E_2 \vee E_3 \vee E_4 \vee E_{10} \vee phi(E_5 \vee E_{11})) reset$$

$$Kp_5 = E_0 \vee E_1 \vee E_2 \vee E_8 \vee E_9 \vee \overline{reset}$$

$$K_6 = (E_4 \overline{init} \vee E_5) reset$$

$$CK = (\overline{E_7} \vee E_8 \vee E_9 \vee E_0 \overline{phi}) reset \quad (\text{même remarque que pour } K_3).$$

E-26
$$K_1 = (K_1 \vee Kp_5) \overline{CK} \vee \overline{reset}$$

$$K_2 = (K_3 K_2 \vee \overline{K_3} K_4) reset$$

$$K_3 = \overline{K_2} (\overline{K_4} \vee K_3 (init \vee K_5 \vee K_6)) \vee \overline{reset}$$

$$K_4 = (phi(K_4 \vee K_2 K_3) \vee Kp_5 (K_4 \vee K_1 CK) \vee K_4 (\overline{K_3} \vee \overline{K_2} \overline{K_6})) reset$$

$$Kp_5 = K_1 \vee \overline{CK} \vee Kp_5 \overline{K_4} \vee \overline{reset}$$

$$K_6 = K_4 \overline{Kp_5} reset (K_6 \vee init K_3 \overline{K_2})$$

$$CK = Kp_5 reset (CK \vee K_1 phi) \vee CK reset (\overline{K_3} \vee K_4 \vee K_6)$$

Remarque : la méthode proposée ici (utilisation des variables définies à la question E-24) n'est pas optimale. On aurait eu plus de profit à utiliser directement le document réponse 20 pour déterminer les expressions logiques de CK et des K_i . En appliquant cette méthode, on obtient par exemple $K_1 = Kp_5 \overline{CK} \vee \overline{reset}$.

Le schéma logique est représenté fig. solution 9.

E-27 Sur le schéma de la fig. solution 9, on a indiqué les temps de propagation associés à chaque porte logique. On y voit que le temps de propagation le plus court est entre K_2 et K_3 ou CK et K_1 . Il vaut 1,17 ns. Le temps de propagation le plus long est entre K_3 et K_6 et vaut 4,76 ns. La durée d'un état instable est donc comprise entre 1,17 ns et 4,76 ns.

Pour assurer que les états instables durent au moins 5 ns, il suffit de modifier le schéma de façon à ce que tout les chemins allant de n'importe quelle entrée d'état à n'importe quelle sortie d'état traversent au moins cinq couches logiques. Pour ce faire, il suffit de rajouter des inverseurs (en nombre pairs) sur les chemins qui sont trop courts. Cet ajout peut intervenir soit en sortie de la machine, ce qui aura pour effet de rallonger tous les états, soit sur les entrées des portes logiques, ce qui permettra en plus d'uniformiser la durée des états instables.

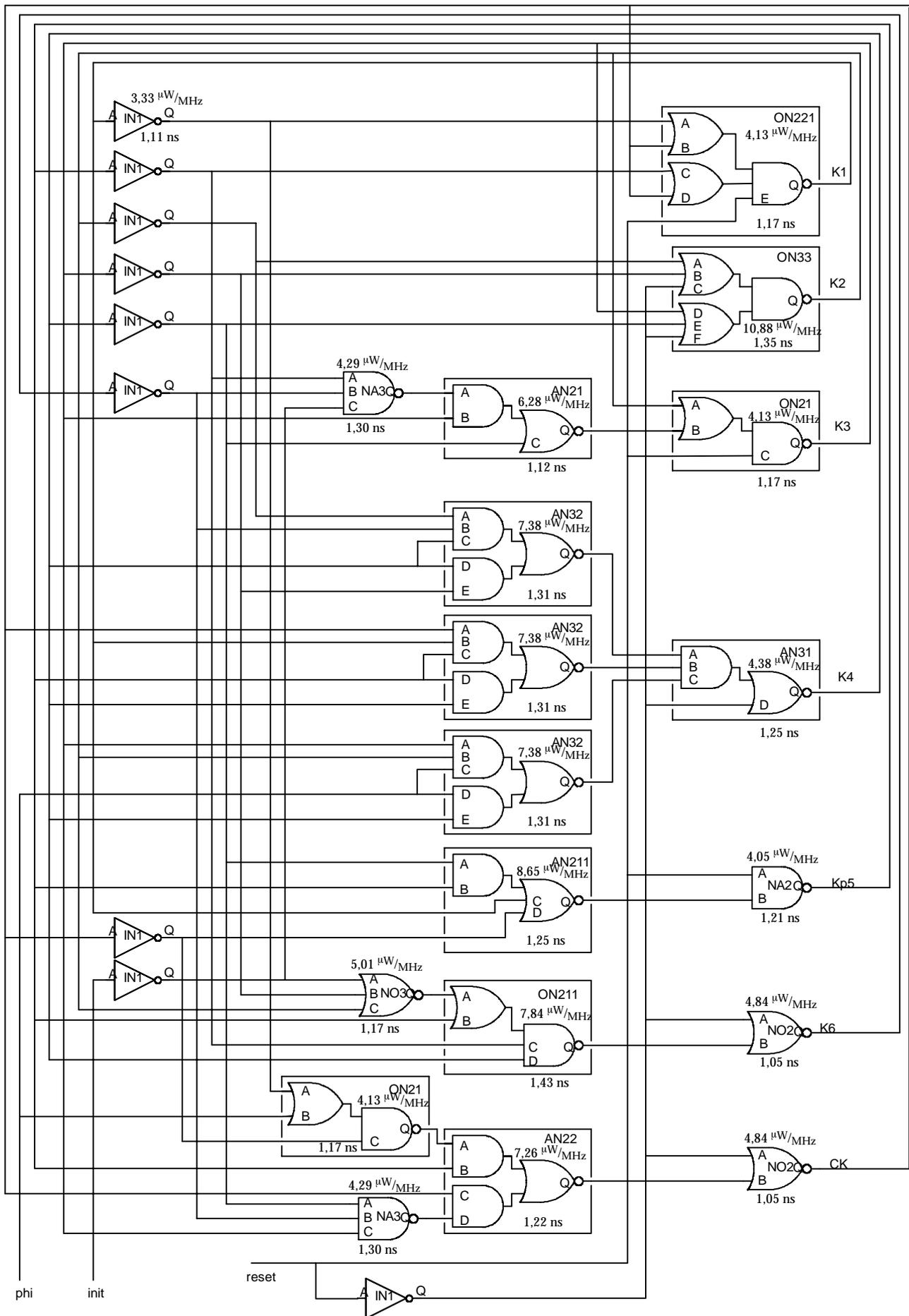


fig. solution 9 : machine d'état asynchrone

E-28 D'après la table des phases, le seul état sensible à la valeur de *init* est l'état 4. Il s'ensuit que les fronts de ce signal peuvent être placés entre le front montant de *phi* et le début de l'état 4 ou entre la fin de ce même état et le front montant suivant de *phi*. Si l'on a assuré que les états instables durent au moins 5 ns, la date au plus tard d'un front de *init* par rapport à un front montant de *phi* est $t + 15$ ns. Si l'on est sûr que les états instables ne durent pas plus de 5 ns, la date au plus tôt d'un front de *init* par rapport à un front montant de *phi* est $t + 25$ ns. On dispose donc d'une très grande liberté.

E-29 Toute synthèse d'un compteur par treize est acceptable, dans la mesure où les contraintes ci-dessus sont respectées. L'absence de parasites sur *init* est cependant importante : ceci, au moins, justifie l'usage d'un compteur synchrone plutôt qu'asynchrone.

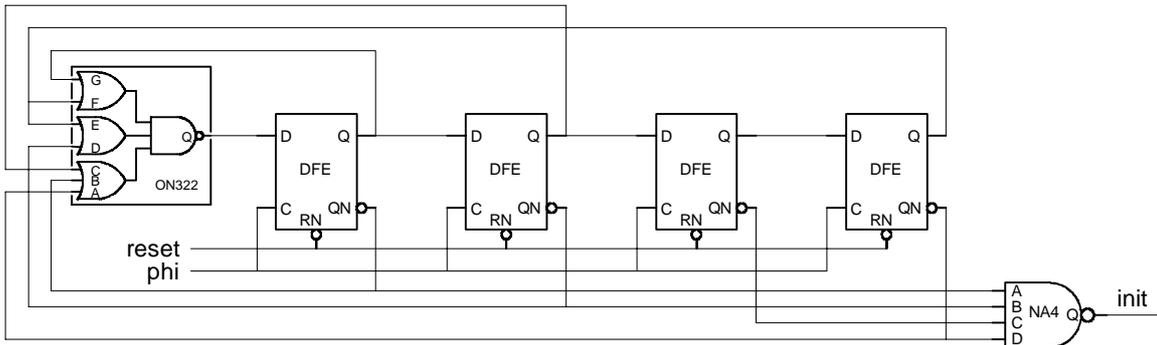
Nous donnons ici une solution particulière, intéressante par le peu de portes logiques qu'elle réclame. Elle consiste à utiliser un registre à décalage rebouclé. La fig. solution 10 décrit à la fois la solution et la façon de l'obtenir.

E-30 En faisant la somme des puissances consommées par les portes de la fig. solution 9, on obtient $P = 134 \mu W / \text{MHz}$. Soit, pour une fréquence de 4,16 MHz, une puissance de **558 μW** (eqv. 111 μA).

La génération de *init*, quant à elle, demande quatre bascules D et une porte ON322 fonctionnant à 4,16 MHz, auxquelles il faut ajouter un NA4 fonctionnant à 320 kHz (la fréquence de *init*). On obtient une puissance totale de :

$$(4 \times 19,52 + 7,39) \times 4,16 + 6 \times 0,32 = 358 \mu W$$

Si l'on compare les consommations de la réalisation synchrone et de la réalisation asynchrone, on voit que cette dernière permet de diviser la consommation par sept. Ce genre de solution semble donc à privilégier dans le cas de contraintes importantes sur la puissance consommée. En revanche, la conception et la validation d'un système asynchrone sont plus ardues que pour un système synchrone.



0	0	0	0
1	0	0	0
	1	0	0
		1	0
			1
1			
0	1		
0	0	1	
0	0	0	1
0	0	0	0

0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	0	0	1
0	0	0	0

Il s'agit de réaliser un compteur possédant 13 états. Le codage de ces états n'ayant pas d'importance, on peut réaliser ce compteur sous la forme d'un registre à décalage. Ainsi, chaque état se déduit du précédent par décalage et ajout d'un bit. La table de gauche montre les éléments de séquence qui sont imposés si on choisit l'état "0000" comme état initial. Il suffit ensuite de remplir les "cases vides" en respectant la règle du décalage et en s'assurant que la séquence ne comporte pas deux états identiques (table de droite). Il ne reste plus qu'à écrire et minimiser la fonction logique qui fournit la valeur d'entrée du registre à décalage. Bien sûr, la solution n'est pas unique. Cependant, une étude exhaustive menée sur cet exemple a montré que toutes les solutions conduisaient à des fonctions logiques de complexité équivalente.

fig. solution 10 : génération de *init*

F – Éléments de micro – électronique

F-1 En utilisant les équations données en introduction de cette partie, on peut obtenir le tableau ci-dessous. Les cases grisées correspondent au régime actif et les cases blanches au régime triode. Le réseau de caractéristiques de fig. solution 11 est directement obtenu à partir de ce tableau.

Pour ce transistor : $K = \frac{K P_N W}{2 L} = \frac{100 \times 10}{2} = 500 \mu A/V^2$

V_{DS}		0	0,25 V	0,5 V	1 V	2 V	4 V
$V_{GS} = 1,3 V$ $V_{eff} = 0,5 V$	I_D	0	94 μA	125 μA	125 μA	125 μA	125 μA
	I_D^o	0,5 mA/V		0	0	0	0
$V_{GS} = 1,8 V$ $V_{eff} = 1 V$	I_D	0	219 μA	375 μA	500 μA	500 μA	500 μA
	I_D^o	1 mA/V			0	0	0
$V_{GS} = 2,8 V$ $V_{eff} = 2 V$	I_D	0	469 μA	875 μA	1,5 mA	2 mA	2 mA
	I_D^o	2 mA/V				0	0

F-2 On peut voir que, pour $V_{DS} = V_{eff}$, les deux équations modélisant l'inversion forte (régime triode et régime actif) donnent le même courant : $I_D = K V_{eff}^2$.

La courbe frontière est donc une parabole d'équation $I_D = K V_{DS}^2$.

F-3 λ introduit une dépendance linéaire de I_D à V_{DS} quand le transistor fonctionne en régime actif. Cette dépendance transforme le courant en une fonction affine de V_{DS} qui vaut $I_D = K V_{eff}^2$ pour $V_{DS} = V_{eff}$ et dont la pente est $\lambda K V_{eff}^2$. Entre $V_{DS} = 2 V$ et $V_{DS} = 4 V$ on trouve une augmentation de I_D : $\Delta I_D = (4 - 2) \lambda K V_{eff}^2 = 2 \times 0,015 \times 500 \times 4 = 60 \mu A$, ce qui nous permet de tracer le segment de droite (trait interrompu) en haut à droite de la fig. solution 11. λ est exprimé en V^{-1} .

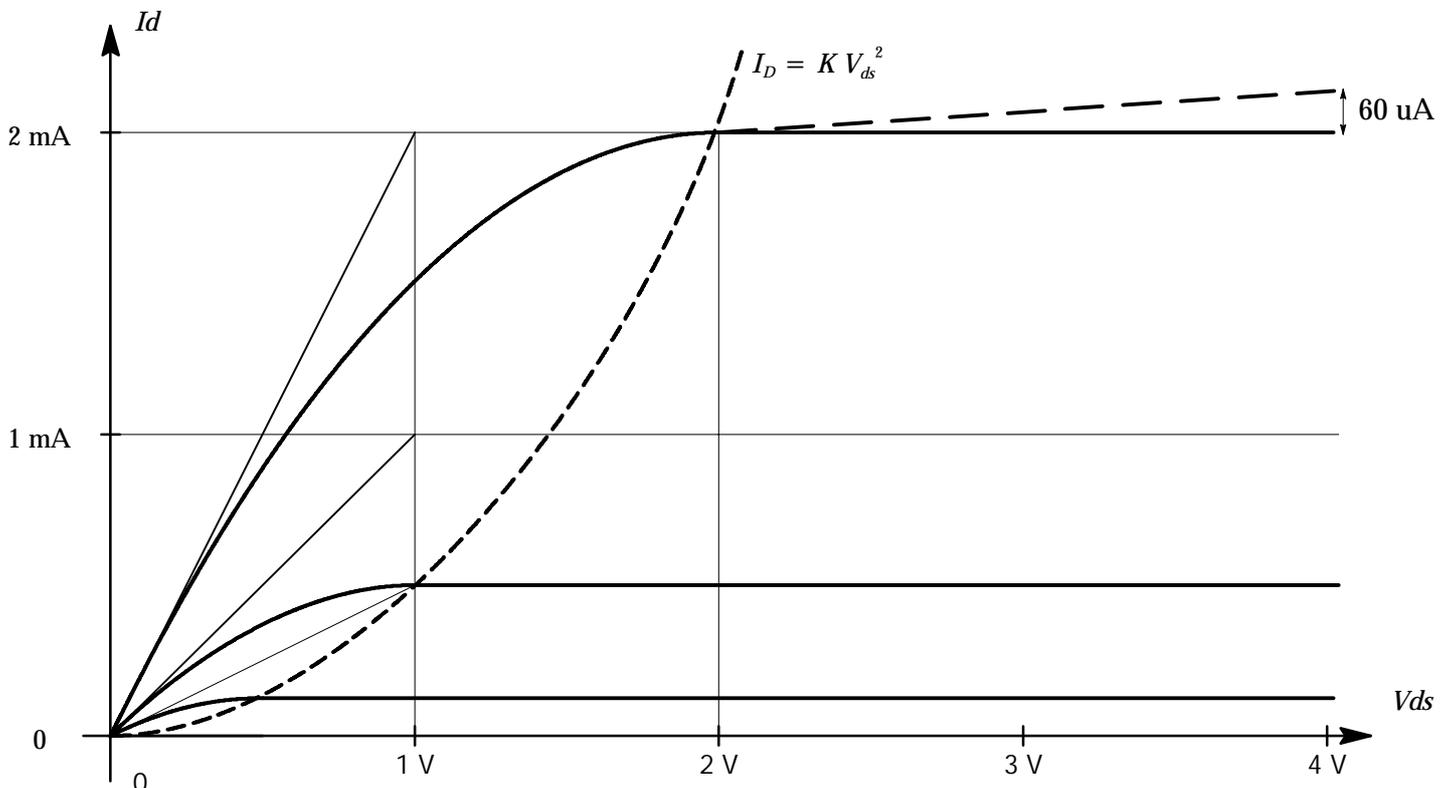


fig. solution 11 : Caractéristiques transistor NMOS (questions F-1, F-2 et F-3)

F-4 Il faut commencer par analyser la signification des données disponibles. Les seules colonnes utiles du tableau sont la quatrième, la huitième et la neuvième. (Les autres valeurs ne s'expriment pas facilement en fonction des paramètres recherchés...)

	<u>régime triode</u> $I_D = 2K V_{DS} \left(V_{eff} - \frac{V_{DS}}{2} \right)$	<u>régime actif</u> $I_D = K V_{eff}^2 \left(1 + \lambda (V_{DS} - V_{eff}) \right)$
$\overset{\circ}{I}_D = \frac{\delta I_D}{\delta V_{SD}}$	$\overset{\circ}{I}_D = 2K (V_{eff} - V_{SD})$	$\overset{\circ}{I}_D = K\lambda V_{eff}^2$
$\frac{V_{SD} \left(\overset{\circ}{I}_D \right)_{V_{SD}=0}}{\left(\overset{\circ}{I}_D \right)_{V_{SD}=0} - \overset{\circ}{I}_D} =$	$\frac{2K V_{eff} V_{SD}}{2K V_{eff} - 2K (V_{eff} - V_{SD})} = V_{eff}$	$V_{SD} \frac{2K V_{eff}}{2K V_{eff} - K\lambda V_{eff}^2} = \frac{2V_{SD}}{2 - \lambda V_{eff}}$
$\frac{\left(\overset{\circ}{I}_D \right)_{V_{SD}=0} - \overset{\circ}{I}_D}{2V_{SD}} =$	$\frac{2K V_{eff} - 2K (V_{eff} - V_{SD})}{2V_{SD}} = K$	

On peut alors construire le tableau suivant :

V_{SG}	K_P	V_{eff}	V_T	$\overset{\circ}{I}_D$ moyen régime actif	KV_{eff}^2	λ
0,9	> 45e-6	< 200mV	> 700 mV	3,9 nA	?	
1,5	60,8e-6	675mV	825 mV	65 nA	28e-6	2,3e-3
2,2	59e-6	1,3 V	900 mV	295 nA	10e-6	3e-3
2,8	57,3e-6	1,8V	1 V	615 nA	185e-6	3,3e-3

On constate des variations non négligeables des paramètres K_P , V_T et λ en fonction du point de repos. On peut considérer que K_P est assez représentatif. V_T présente, dans notre cas, des fluctuations de l'ordre de 20%. Quant à λ , cela se voit assez peu ici, mais il est susceptible de très grandes variations. En conclusion, ce modèle ne peut être utilisé que pour effectuer des prédéterminations qui devront être confirmées par une simulation (spice).

F-5 $1/\lambda$ est l'équivalent de la tension d'EARLY.

La grande différence vient de ce que ce paramètre fluctue dans de grandes proportions en fonction de I_D et qu'il y a donc une tension d'EARLY différente pour chaque valeur de V_{GS} .

Modélisation petits signaux

F-6

$$I_{D_{sat}} = K V_{eff}^2 \text{ soit } V_{eff} = \sqrt{\frac{I_{D_{sat}}}{K}} \text{ et } V_{GS} = V_T + \sqrt{\frac{I_{D_{sat}}}{K}}$$

F-7 Remarquons d'abord que, dans le modèle en T, le courant de grille est toujours nul. En effet, le générateur de courant reproduit le courant qui traverse r_S . Il suffit d'appliquer la loi des noeuds en G pour voir que le courant entrant par la grille est nul. Pour que les deux modèles soient équivalents, il faut que $i = g_m v_{gs}$ (branche DS dans les deux modèles). On a, par ailleurs $v_{gs} = r_{Si}$ (branche GS). Il est donc évident que :

$$r_S = \frac{1}{g_m} \text{ est la condition pour que les deux modèles soient équivalents.}$$

$$\mathbf{F-8} \quad g_m = \left[\frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} \right]_{V_{DS}=cte} \quad r_{ds} = \left[\frac{\partial V_{DS}}{\partial I_D} \right]_{V_{GS}=cte}$$

$$\mathbf{F-9} \quad \text{Si } \lambda = 0, I_D = K V_{eff}^2 = K (V_{GS} - V_T)^2$$

alors $g_m = 2 K (V_{GS} - V_T)$ soit $g_m = 2 K V_{eff}$

En exploitant l'expression établie en F-6 : $g_m = 2 \sqrt{K I_{Dsat}}$

$$\mathbf{F-10} \quad I_D = K V_{eff}^2 (1 + \lambda (V_{DS} - V_{eff}))$$

d'où $r_{ds} = \frac{1}{\lambda K V_{eff}^2}$ or $I_{Dsat} = K V_{eff}^2$ et donc $r_{ds} = \frac{1}{\lambda I_{Dsat}}$

Paire différentielle à transistors MOS

$$\mathbf{F-11} \quad I_1 = K (V_1 - V_S - V_T)^2 \quad V_1 = V_C + V_D$$

$$I_2 = K (V_2 - V_S - V_T)^2 \quad V_2 = V_C - V_D$$

$$I_1 + I_2 = I_0$$

En exprimant I_0 en fonction de V_C , V_D et V_S , puis en isolant V_S on obtient :

$$V_S = V_C - V_T - \sqrt{\frac{I_0}{2K} - V_D^2}$$

F-12 Quand $V_D = 0$, $V_1 = V_2$. Les deux transistors ont même V_{GS} . Il s'ensuit donc que $V_{GS1} - V_T = V_{GS2} - V_T$.

Le système étant équilibré, les deux transistors sont parcourus par le même courant $I_0/2$. On peut

donc écrire : $\frac{I_0}{2} = K V_{eff0}^2$ ou encore : $V_{eff0} = \sqrt{\frac{I_0}{2K}}$

On peut donc exprimer différemment le résultat de la question F-11 :

$$V_S = V_C - V_T - \sqrt{V_{eff0}^2 - V_D^2}$$

F-13 On peut maintenant exprimer I_1 et I_2 en fonction de V_C , V_D , V_{eff0} , V_T et K :

$$I_1 = K \left(V_D + \sqrt{V_{eff0}^2 - V_D^2} \right)^2 \quad \text{et} \quad I_2 = K \left(-V_D + \sqrt{V_{eff0}^2 - V_D^2} \right)^2$$

Pour qu'aucun des deux transistors ne soit bloqué, il faut que V_D soit tel que les deux courants ci-dessus soient réels et non nuls. Ce qui peut s'écrire :

$$|V_D| \leq V_{eff0} \quad \text{et} \quad |V_D| < \sqrt{V_{eff0}^2 - V_D^2} \quad \text{soit encore :} \quad |V_D| < \frac{V_{eff0}}{\sqrt{2}}$$

Si cette condition n'est plus satisfaite, alors un seul des deux transistors est conducteur. Il reçoit la totalité du courant I_0 . Son V_{GS} vaut alors : $V_T + \sqrt{2} V_{eff0}$ d'où :

$$V_S = V_C + |V_D| - V_T - \sqrt{2} V_{eff0} \quad \text{quand l'un des transistors est bloqué.}$$

F-14 Graphique $V_S = f(V_D)$ pour $V_C = \text{cte} = 0$.

Pour $|V_D| < \frac{V_{eff0}}{\sqrt{2}}$ on a $V_S = - \left(V_T + \sqrt{V_{eff0}^2 - V_D^2} \right)$

et pour $|V_D| \geq \frac{V_{eff0}}{\sqrt{2}}$ on a $V_S = |V_D| - \left(V_T + \sqrt{2} V_{eff0} \right)$

On voit très vite que la première équation correspond à un arc de cercle de rayon V_{eff0} et de centre $(0; -V_T)$. L'autre équation correspond à deux demi-droites tangentes au cercle précédent. Partant de ces constatations, on peut tracer le graphique fig. solution 12.

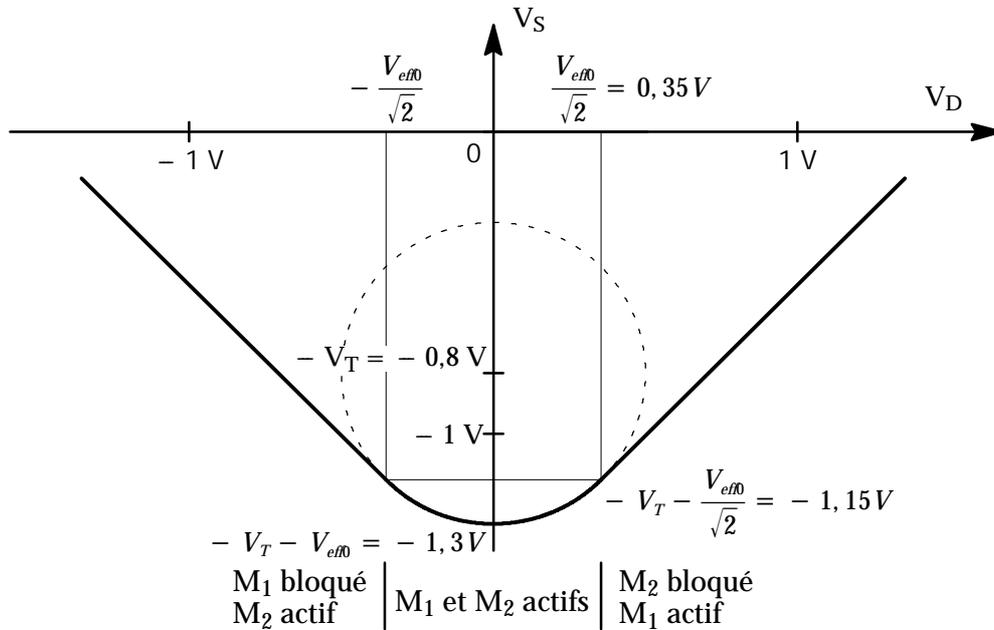


fig. solution 12 : Graphique $V_S = f(V_D)$ pour $V_C = \text{cte} = 0$. (question F-14)

F-15 Si on développe l'expression des courants dans les transistors : $I_2 = K \left(\sqrt{V_{eff0}^2 - V_D^2} \pm V_D \right)^2$

$$I_1 = K V_{eff0}^2 \left[1 \pm 2 \frac{V_D}{V_{eff0}} \sqrt{1 - \frac{V_D^2}{V_{eff0}^2}} \right] \text{ Soit : } I_2 = \frac{I_0}{2} \left[1 \pm 2 \frac{V_D}{V_{eff0}} \sqrt{1 - \frac{V_D^2}{V_{eff0}^2}} \right]^2$$

F-16 Cf. fig. solution 13.

F-17 Il ne s'agit pas d'une question, mais d'une introduction aux questions suivantes (qui a été numérotée par erreur comme une question...)

F-18 $V_S > V_{SS} + V_B - V_{TN}$

A la question F-14, on a montré (graphique) que V_S était minimum pour V_D nul. On considère donc V_2 nul, ce qui nous conduit à V_C nul lui aussi. La condition précédente peut alors s'écrire :

$-V_{eff0} > V_{SS} + V_B$

en remarquant que $V_B = V_{eff5} + V_T$, on peut déduire que $V_{eff5} < |V_{SS}| - V_{eff0} - V_{TN}$.

Sachant de plus que $K_5 = \frac{I_0}{V_{eff5}^2}$ on peut écrire : $K_5 > \frac{I_0}{\left(|V_{SS}| - V_{eff0} - V_{TN} \right)^2}$

	$V_D = -\frac{V_{eff0}}{\sqrt{2}}$	$V_D = 0$	$V_D = \frac{V_{eff0}}{\sqrt{2}}$
$I_1 = \frac{I_0}{2} \left[1 + 2 \frac{V_D}{V_{eff0}} \sqrt{1 - \frac{V_D^2}{V_{eff0}^2}} \right]$	0	$\frac{I_0}{2}$	I_0
$I_2 = \frac{I_0}{2} \left[1 - 2 \frac{V_D}{V_{eff0}} \sqrt{1 - \frac{V_D^2}{V_{eff0}^2}} \right]$	I_0	$\frac{I_0}{2}$	0
$\frac{dI_1}{dV_D} = \frac{I_0}{V_{eff0}} \left(1 - 2 \frac{V_D^2}{V_{eff0}^2} \right)$	0	$\frac{I_0}{V_{eff0}}$	0
$\frac{dI_2}{dV_D} = -\frac{I_0}{V_{eff0}} \left(1 - 2 \frac{V_D^2}{V_{eff0}^2} \right)$	0	$-\frac{I_0}{V_{eff0}}$	0

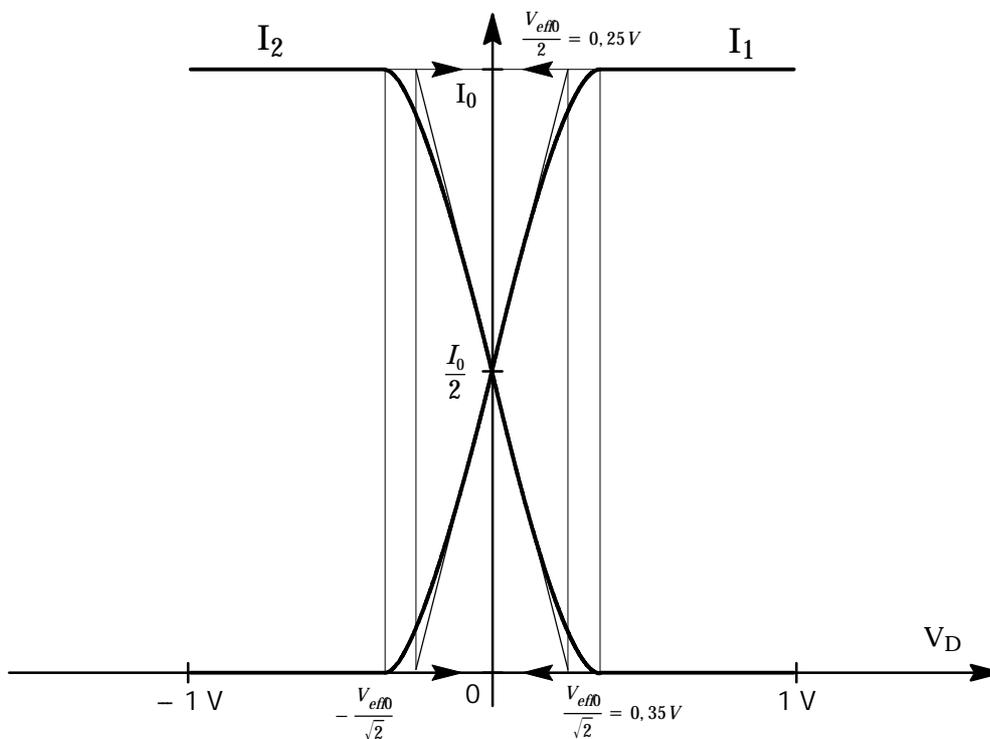


fig. solution 13 : Graphique $I_{1,2} = f(V_D)$. (question F-16)

F-19 On peut écrire : $V_{DD} - V_{SD4} + V_{GD2} = V_2$ (loi de maille). Du fait que $V_1=0$, on a $V_C = \frac{V_2}{2}$ et $V_D = -\frac{V_2}{2}$. Le maximum de V_2 correspond à $V_D = -\frac{V_{eff0}}{\sqrt{2}}$, soit $V_2 = \sqrt{2} V_{eff0}$ (au delà, M_1 est bloqué). Quand V_2 est maximum, M_2 et M_4 sont traversés par le courant I_0 . On en déduit qu'à ce moment là : $V_{SD4} = V_{SG4} = V_{TP} + \sqrt{\frac{I_0^2}{K_{34}}}$. Enfin, la condition pour que M_2 reste actif peut s'écrire : $V_{GD} < V_{TN}$. Il s'ensuit :

$$V_{DD} > V_{TP} - V_{TN} + \sqrt{2} V_{eff0} + \sqrt{\frac{I_0}{K_{34}}}$$

F-20 Si l'on récapitule les inégalités exprimées dans les réponses F-18 et F-19, on remarque :

$$V_{eff5} < -V_{SS} - V_{eff0} - V_{TN} \text{ et } V_{DD} > V_{TP} - V_{TN} + \sqrt{2}(V_{eff0} + V_{eff34})$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités, puis en simplifiant, on obtient :

$$V_{eff0} < \frac{V_{DD} - V_{SS} - V_{eff5} - V_{TP} - \sqrt{2} V_{eff34}}{1 + \sqrt{2}}$$

$$\text{soit } V_{eff0} < \frac{5 - 0,1 - 0,75 - 0,141}{2,41} = 1,66 \text{ V}$$

En reprenant les deux inégalités de départ avec la valeur calculée de V_{eff0} , on arrive à :

$$V_{SS} < -V_{eff5} - V_{eff0} - V_{TN} = -0,1 - 1,66 - 0,8 = -2,56 \text{ V}$$

$$V_{DD} > V_{TP} - V_{TN} + \sqrt{2}(V_{eff0} + V_{eff34}) = 0,75 - 0,8 + 1,414 \times 1,76 = 2,44 \text{ V}$$

On peut donc utiliser une alimentation symétrique sans trop dégrader les valeurs possibles pour V_{effm} .

F-21 Le schéma équivalent est représenté fig. solution 14.

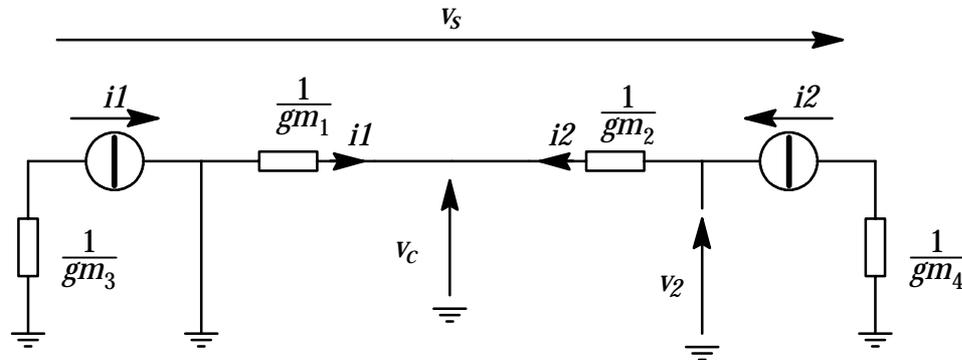


fig. solution 14 : schéma équivalent de l'amplificateur

On peut écrire :

$$v_{d1} = -\frac{i_1}{g_{m3}} = \frac{g_{m1}}{g_{m3}} v_c \text{ et } v_{d2} = -\frac{i_2}{g_{m4}} = \frac{g_{m2}}{g_{m4}} (v_c - v_2)$$

$$v_s = v_{d2} - v_{d1} = \left(\frac{g_{m2}}{g_{m4}} - \frac{g_{m1}}{g_{m3}} \right) v_c - \frac{g_{m2}}{g_{m4}} v_2$$

$$\text{Soit encore : } v_s = -\frac{g_{m12}}{g_{m34}} v_2$$

F-22 On a : $g_{m12} = 2 \sqrt{K_{12} \frac{I_0}{2}}$ et $g_{m5} = 2 \sqrt{K_5 I_0}$

En éliminant I_0 dans ce système, on obtient :

$$g_{m12} = g_{m5} \sqrt{\frac{K_{12}}{2 K_5}}$$

Enfin, en revenant à la définition du facteur de transconductance :

$$g_{m12} = g_{m5} \sqrt{\frac{(W/L)_{12}}{2 (W/L)_5}}$$

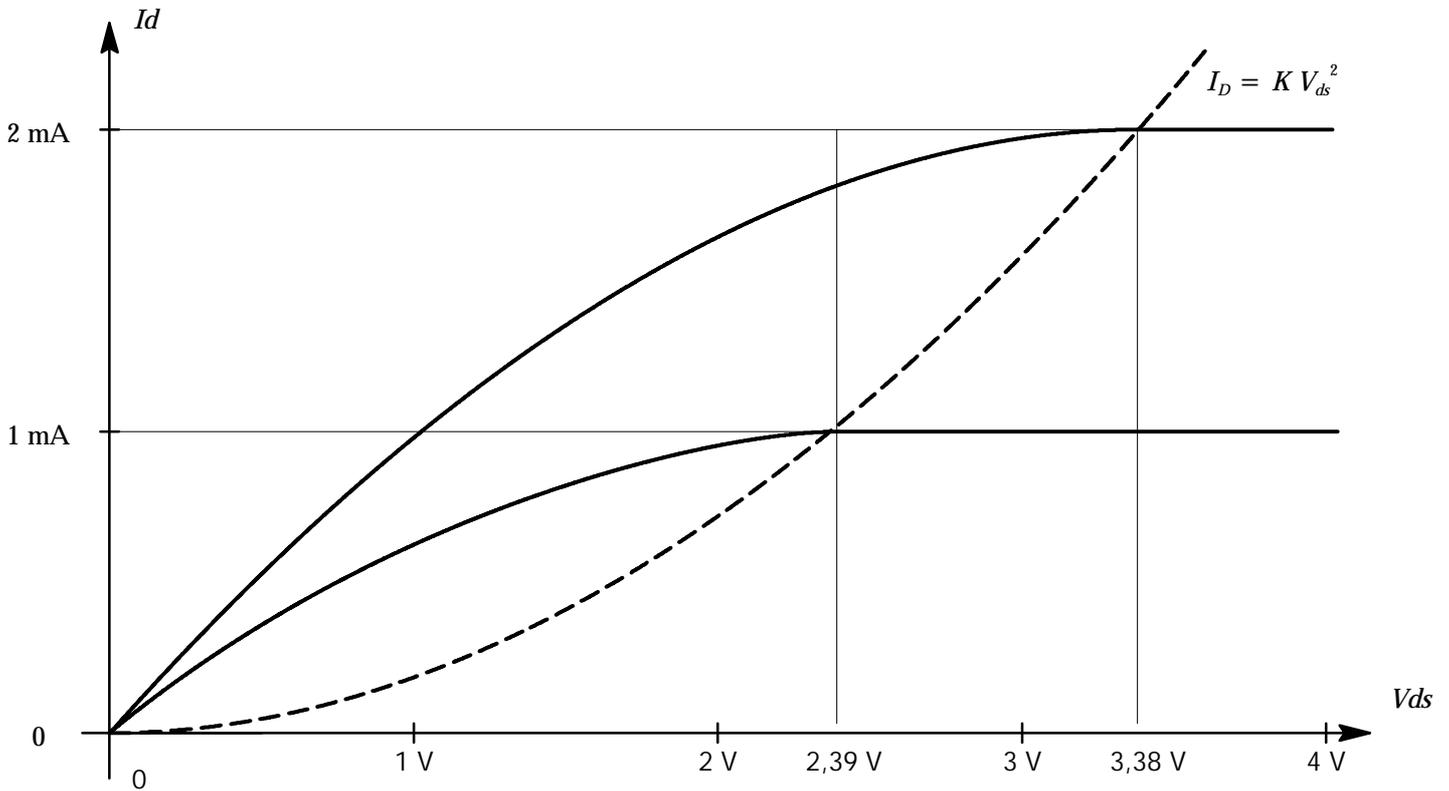


fig. solution 15 : Caractéristiques du miroir de courant (a)

Miroirs de courant

F-23 (a) Remarquons d'abord que $K = \frac{KPW}{2L} = 175 \mu A/V^2$, $V_{DS1} = V_{GS1} = V_T + V_{eff}$ et que

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{I_{IN}}{K(1 + \lambda V_T)}} \text{ Pour } I_{IN} = 1 \text{ mA on obtient } V_{eff} = 2,39 \text{ V et pour } I_{IN} = 2 \text{ mA, } V_{eff} = 3,38 \text{ V}$$

On peut alors tracer les caractéristiques de la fig. solution 15 sur laquelle on a négligé l'influence de λ , invisible à cette échelle.

(b) Le schéma équivalent petit signal (basse fréquence) de ce montage est donné ci-contre fig. solution 16. **Sa résistance de sortie est simplement r_{ds}**

(c) Pour que ce montage fonctionne comme un miroir de courant, il faut que I_{IN} soit positif et

$$\text{que } V_{OUT} > V_{eff} = \sqrt{\frac{I_{IN}}{K_{12}}}$$

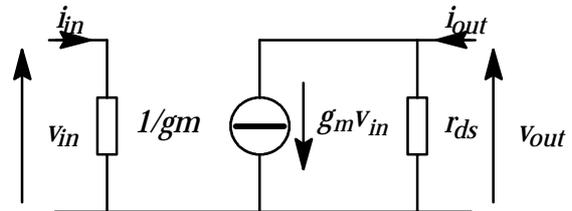


fig. solution 16 : Schéma équivalent du miroir de courant (a)

(d) Quand $V_{OUT} > V_{eff}$ on peut écrire :

$$I_{OUT} = I_{IN} \frac{K_2(1 + \lambda(V_{OUT} - V_{eff}))}{K_1(1 + \lambda V_T)}$$

On remarque alors : 1) que les courants ne peuvent être vraiment identiques que si les tension drain source des deux transistors sont identiques; 2) que si les facteurs de transconductance sont différents, le miroir introduit une atténuation ou une amplification du courant.

F-24 Pour les calculs qui suivent, on avait intérêt à négliger λ pour les transistors M_1 , M_3 et M_4 .

(a) $V_{G1} = V_T + \sqrt{\frac{I_{IN}}{K(1 + \lambda V_T)}}$ $V_{G3} = V_{G1} + V_T + \sqrt{\frac{I_{IN}}{K(1 + \lambda V_T)}}$ $V_{G3} = 2 V_{G1}$

(b) Posons $V_{eff} = \sqrt{\frac{I_{IN}}{K}}$ et appelons V_{DS2} la tension drain source de M_2 . Il vient :

$$I_{OUT} = K (V_{G3} - V_{DS2} - V_T)^2 \quad (\text{transistor } M4 \text{ pour lequel on néglige } \lambda)$$

$$I_{OUT} = K (V_{eff})^2 (1 + \lambda (V_{DS2} - V_{eff})) \quad (\text{transistor } M2)$$

En résolvant ce système, on obtient, après avoir éliminé la solution non réaliste :

$$I_{OUT} = I_{IN} \left[1 + \lambda V_{eff} \left[1 + \frac{V_T}{V_{eff}} + \frac{\lambda V_{eff}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda V_{eff} + 2)^2 + 4\lambda V_T} \right] \right]$$

On voit que, en considérant M_4 comme idéal, on a rendu I_{OUT} indépendant de V_{OUT} , tant que M_4 reste en régime actif. Cette limite se calcule simplement :

$$V_{OUT_{min}} = V_{G3} - V_T - V_{eff} + V_{eff} = V_T + 2V_{eff}$$

(c) Dans le cas où M_4 seul est en régime triode, on obtient :

$$I_{OUT} = 2K (V_{OUT} - V_{DS2}) \left(V_{G3} - V_{DS2} - V_T - \frac{V_{OUT} - V_{DS2}}{2} \right) \quad (\text{transistor } M4)$$

$$I_{OUT} = K (V_{eff})^2 (1 + \lambda (V_{DS2} - V_{eff})) \quad (\text{transistor } M2)$$

Ici encore, il faut éliminer la solution non réaliste pour obtenir :

$$I_{OUT} = I_{IN} (1 + X\lambda V_{eff})$$

$$X = 1 + \frac{V_T}{V_{eff}} + \frac{\lambda V_{eff}}{2} - \sqrt{5 + \lambda V_{eff} + 4 \frac{V_T}{V_{eff}} + \left(\frac{\lambda V_{eff}}{2} + \frac{V_T}{V_{eff}} \right)^2 + \frac{V_{OUT}}{V_{eff}} \left(\frac{V_{OUT}}{V_{eff}} - 2 \left(2 + \frac{V_T}{V_{eff}} \right) \right)}$$

Ceci reste valable tant que M_2 reste en régime actif :

$$V_{OUT_{min}} = V_T + 2V_{eff} - \sqrt{V_T (V_T + 2V_{eff})}$$

(d) Enfin, dans le cas où M_2 et M_4 sont tous deux en régime triode, on obtient :

$$I_{OUT} = 2K (V_{OUT} - V_{DS2}) \left(V_{G3} - V_{DS2} - V_T - \frac{V_{OUT} - V_{DS2}}{2} \right) \quad (\text{transistor } M4)$$

$$I_{OUT} = 2K V_{DS2} \left(V_{eff} - \frac{V_{DS2}}{2} \right) \quad (\text{transistor } M2)$$

Ce qui nous donne, toujours après avoir éliminé la solution non réaliste :

$$I_{OUT} = I_{IN} \left(1 - \frac{X}{2} \right)$$

$$X = 1 + \left(\frac{V_{OUT}}{V_{eff}} - \left(2 + \frac{V_T}{V_{eff}} \right) \right)^2 - \left(1 + \frac{V_T}{V_{eff}} \right) \sqrt{2 + 2 \left(\frac{V_{OUT}}{V_{eff}} - \left(2 + \frac{V_T}{V_{eff}} \right) \right)^2 - \left(1 + \frac{V_T}{V_{eff}} \right)^2}$$

(e) La fig. solution 17 donne la caractéristique $I_{OUT} = f(V_{OUT})$ pour I_{in} valant 1mA et 2mA. Afin de faciliter la comparaison, on a représenté en pointillé la même caractéristique pour le miroir de courant (a).

(f) Le schéma équivalent petit signal (basse fréquence) de ce montage est donné fig. solution 18. La résistance de sortie s'exprime :

$$r_{out} = \left[\frac{V_{out}}{I_{out}} \right]_{V_{in}=0}$$

soit $r_{out} = r_{ds2} + r_{ds4} (1 + g_m r_{ds2})$

soit encore, si les r_{ds} sont identiques :

$$r_{out} = r_{ds} (2 + g_m r_{ds})$$

(g) Le principal avantage que présente ce miroir sur le précédent est sa grande résistance de sortie. Son principal inconvénient est de limiter la plage de tension de sortie acceptable.

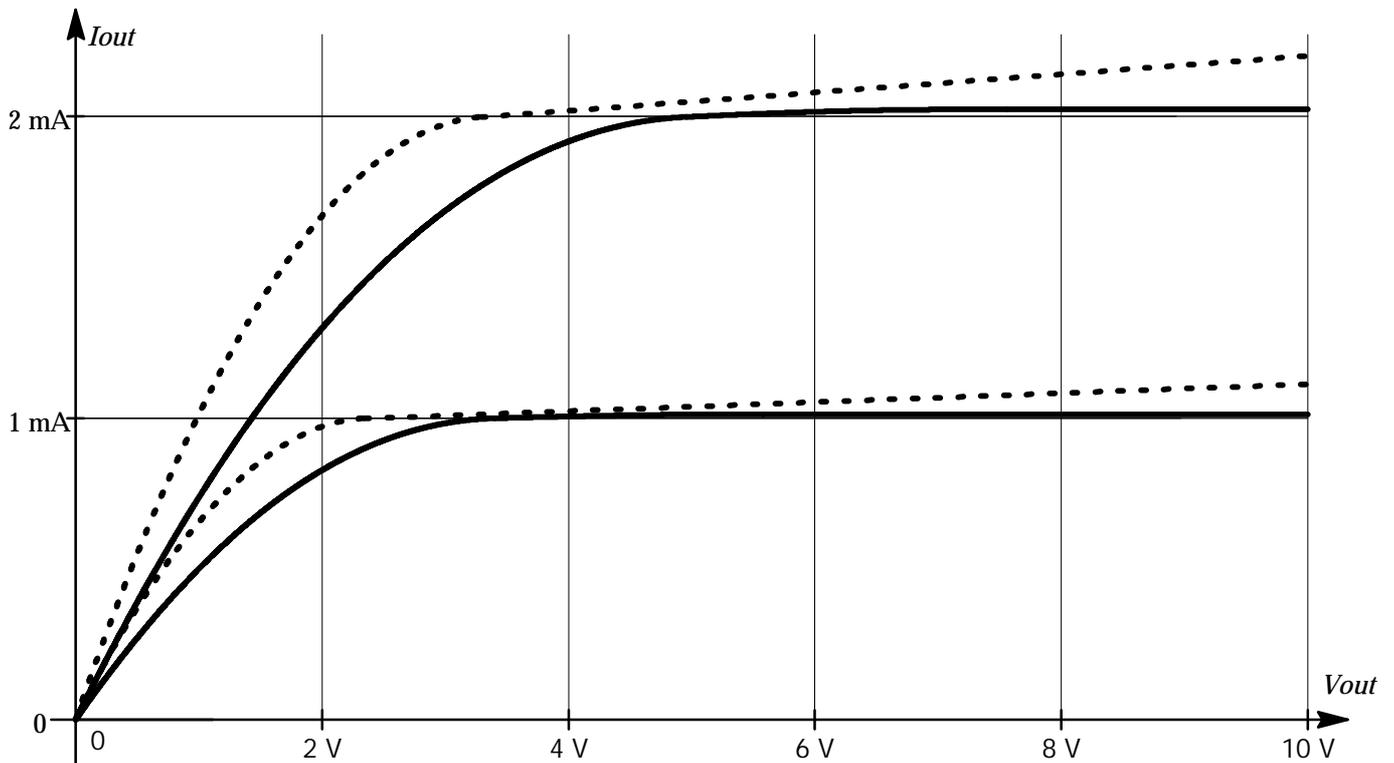


fig. solution 17 : Caractéristiques du miroir de courant (b)

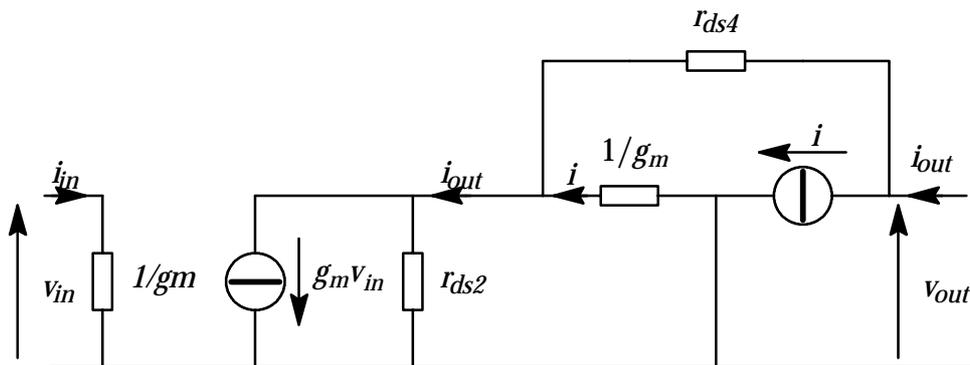


fig. solution 18 : Schéma équivalent des miroirs de courant (b) et (c)

F-25 Dans les conditions indiquées, on montre facilement que :

$$V_{G5} = V_{G3} = V_{G4} \approx V_T + 2V_{eff} \text{ avec } V_{eff} = \sqrt{\frac{I_{IN}}{K_1}}$$

d'où l'on déduit $V_{DS1} \approx V_{eff}$ et $V_{DS2} \approx V_{eff}$.

Les deux transistors ont des points de fonctionnement très proches indépendamment de V_{out} . On a donc affaire à un miroir de courant de bonne qualité. Le schéma équivalent de ce montage est identique à celui du précédent (Cf. fig. solution 18). On obtient donc la même résistance de sortie. La valeur minimale de V_{OUT} est atteinte quand M4 s'approche du régime triode soit pour

$$V_{OUT} \approx 2 V_{eff}$$

En fixant une tension de polarisation plus basse pour le transistor cascode de sortie, on arrive à gagner l'équivalent de V_T sur la plage de tensions de sortie où le miroir se comporte correctement.

Polarisation des transistors

Pont de polarisation

$$\text{F-26 } I_0 = K_5 V_{eff5}^2 \Rightarrow \boxed{K_5 = 5 \text{ mA/V}^2}$$

$$I_0 = K_7 (V_{SG7} - V_{TP})^2 = K_7 (V_{DD} - V_{GS5} - V_{TP})^2 = K_7 (V_{DD} - V_{TN} - V_{TP} - V_{eff5})^2$$

$$\text{soit } \boxed{K_7 = 4,4 \mu\text{A/V}^2}$$

$$K_5 = \frac{KP_N}{2} \left(\frac{W}{L}\right)_5 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{W}{L}\right)_5 = 100}$$

$$K_7 = \frac{KP_P}{2} \left(\frac{W}{L}\right)_7 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{W}{L}\right)_7 = \frac{1}{4}}$$

$$\text{F-27 } V_{DD} = \sqrt{\frac{I_0}{K_7}} + V_{TP} + \sqrt{\frac{I_0}{K_5}} + V_{TN} \Rightarrow I_0 = \frac{K_5 K_7 (V_{DD} - V_{TP} - V_{TN})^2}{(\sqrt{K_5} + \sqrt{K_7})^2}$$

I_0 est maximum pour $V_{TN}=0,64 \text{ V}$, $V_{TP}=0,6 \text{ V}$, $K_5=6 \text{ mA/V}^2$ et $K_7=5,3 \mu\text{A/V}^2$:

$$\boxed{I_{0\text{max}} = 70 \mu\text{A}}$$

I_0 est minimum pour $V_{TN}=0,96 \text{ V}$, $V_{TP}=0,9 \text{ V}$, $K_5=4 \text{ mA/V}^2$ et $K_7=3,5 \mu\text{A/V}^2$:

$$\boxed{I_{0\text{min}} = 33 \mu\text{A}}$$

F-28 La transconductance g_m des transistors M_1 et M_2 de la paire différentielle est proportionnelle à la racine carrée de I_0 . L'incertitude sur ce courant étant de $\pm 40\%$, l'incertitude sur g_m est $\pm 20\%$. On peut remarquer aussi que g_m est proportionnel à la racine carrée de KP , ce qui aggrave encore sa dispersion...

polarisation par une tension fixe

$$\text{F-29 } \boxed{V_B = V_{TN} + V_{eff5} = 0,85 \text{ V}} \text{ et } \boxed{\left(\frac{W}{L}\right)_5 = 100}$$

$I_0 = K_5 (V_B - V_{TN})^2$ est maximum pour K_5 maximum et V_{TN} minimum et minimum dans le cas contraire:

$$\boxed{I_{0\text{max}} = 375 \mu\text{A}} \text{ et } \boxed{I_{0\text{min}} = 0 \text{ A}}$$

Avec une telle incertitude sur le courant, l'incertitude sur la valeur de g_m est supérieure à 100% ! Cette solution semble donc à exclure...

polarisation par un courant fixe

$$\text{F-30 (a) } \boxed{K_5 = K_6 = 5 \text{ mA/V}^2} \quad \boxed{\left(\frac{W}{L}\right)_5 = \left(\frac{W}{L}\right)_6 = 100}$$

(b) La structure étant un miroir de courant, il n'y a aucune dispersion sur I_0 due à cette structure.

(c) La valeur de g_m pour les transistors M_1 et M_2 de la paire différentielle ne dépend plus que de la racine carrée de KP . On peut donc s'attendre à une incertitude de l'ordre de $\pm 10\%$ sur sa valeur.

(d) C'est la solution qui permet le mieux de contrôler le comportement d'une structure analogique. Elle ne permet cependant pas de fixer avec précision les caractéristiques petits signaux des structures polarisées.

polarisation par une résistance externe

F-31 On peut écrire : $I_a = K_7 (V_B - V_T - R_P I_a)^2$ et $I_b = K_6 (V_B - V_T)^2$
 Du fait que les courants sont égaux, on arrive à une équation du second degré en V_B qui a une racine évidente $V_B = V_T$. On en déduit que V_B peut prendre deux valeurs :

$$\boxed{V_B = V_T} \text{ et } \boxed{V_B = V_T + \frac{1 - \sqrt{\frac{K_6}{K_7}}}{K_6 R_P}}$$

La première correspond à $I_a = I_b = 0$, tandis que la deuxième correspond au point de fonctionnement attendu. Pour que ce point de fonctionnement existe, il importe que $\boxed{K_6 < K_7}$ qui est donc la condition nécessaire pour que ce montage puisse fonctionner.

F-32 $g_{m6} = 2 K_6 (V_B - V_T)$

Soit :
$$\boxed{g_{m6} = 2 \frac{1 - \sqrt{\frac{K_6}{K_7}}}{R_P}}$$

F-33 La valeur de g_{m6} obtenue ici est indépendante de la valeur absolue de K_6 , elle ne dépend que du rapport K_6/K_7 (qui, par hypothèse, est bien connu) et de R_P résistance extérieure au circuit qu'il est donc possible d'ajuster en fonction de l'application. Si la tension V_B issue de ce montage est utilisée pour polariser le transistor M_5 de la figure 13, alors R_P permettra de fixer directement la transconductance de la paire différentielle M_1 - M_2 .

F-34 $\boxed{V_{SD8} = V_{DD} - V_B}$

$\boxed{V_{DS6} = V_B}$

$$\boxed{V_{SD9} = V_{SG9} = \sqrt{\frac{K_6}{K_9}} (V_B - V_{TN}) + V_{TP}}$$

$$\boxed{V_{DS7} = V_{DD} - V_{SD9} - R_P K_6 (V_B - V_{TN})^2}$$

En exploitant la valeur de V_B trouvée à la question F-31 on peut calculer les écarts :

$$V_{SD8} - V_{SD9} = V_{DD} - V_{TN} - V_{TP} - \frac{1 - \sqrt{\frac{K_6}{K_7}}}{K_6 R_P} \left[1 + \sqrt{\frac{K_6}{K_9}} \right]$$

$$V_{DS7} - V_{DS6} = V_{DD} - V_{TN} - V_{TP} - \frac{1 - \sqrt{\frac{K_6}{K_7}}}{K_6 R_P} \left[2 + \sqrt{\frac{K_6}{K_9}} - \sqrt{\frac{K_6}{K_7}} \right]$$

Ces écarts restent relativement importants (de l'ordre de $V_{DD}/2$).

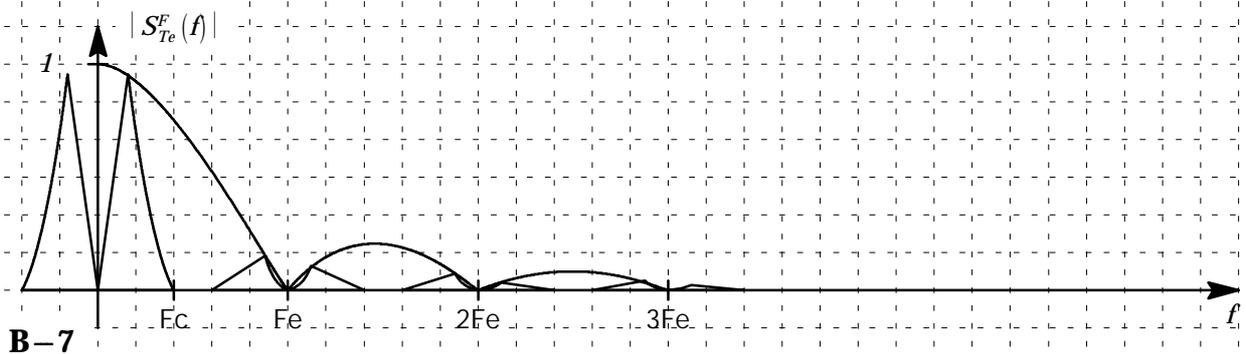
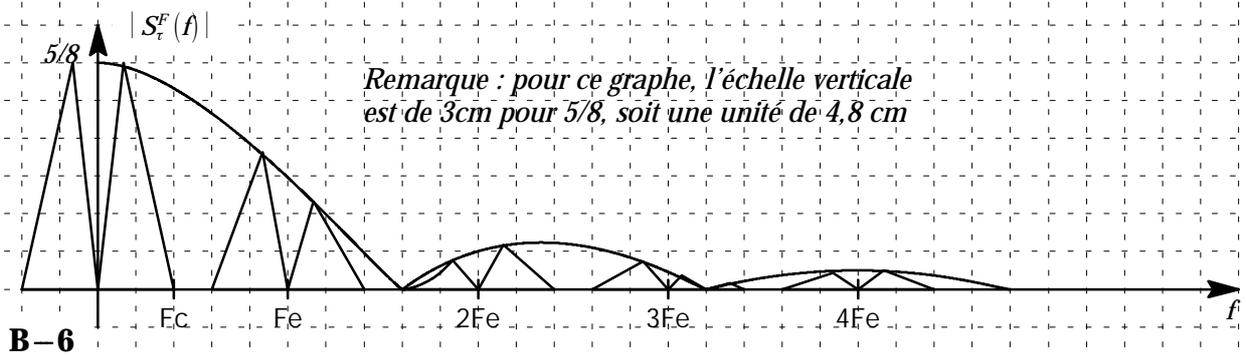
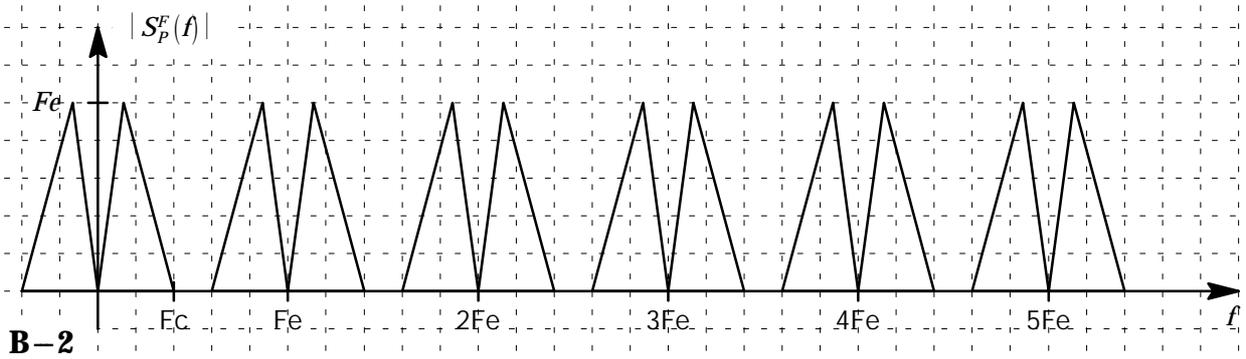
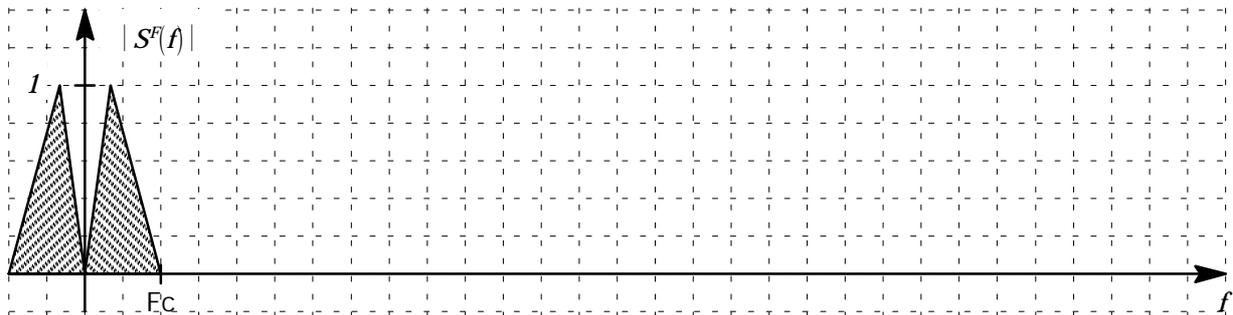
Il est clair que si les λ ne sont plus négligeables, du fait que les V_{DS} de M_8 et M_9 sont très différents, les courants I_a et I_b ne seront pas égaux et le calcul de la question F-32 sera erroné. Pour pallier cet inconvénient, on peut essayer de diminuer les écarts en augmentant K_9 . Ce remède montre cependant vite ses limites car on dégrade alors la capacité d'adaptation de la structure à la dispersion des paramètres des transistors. Il paraît bien préférable, d'augmenter la résistance de sortie du miroir de courant M_9 - M_8 en utilisant, par exemple un miroir cascode. A condition de disposer d'une tension d'alimentation suffisante, on peut aussi cascorder le miroir dégénéré M_6 - M_7 .

ÉLÉMENTS D'UNE PROTHÈSE AUDITIVE NUMÉRIQUE

Correction des documents réponse

Document réponse 1 : (Question A – 2)

$P_{S_{dB}}$ \ V_{me}	@ 1 kHz			@ 5 kHz		
	<i>min</i>	<i>typ</i>	<i>max</i>	<i>min</i>	<i>typ</i>	<i>max</i>
30 dB SPL	$10^{-\frac{107}{20}} = 4,5\mu V$	$10^{-\frac{104}{20}} = 6,3\mu V$	$10^{-\frac{101}{20}} = 8,9\mu V$	$10^{-\frac{102}{20}} = 7,9\mu V$	$10^{-\frac{99}{20}} = 11,2\mu V$	$10^{-\frac{96}{20}} = 15,8\mu V$
100 dB SPL	$10^{-\frac{37}{20}} = 14,1mV$	$10^{-\frac{34}{20}} = 20mV$	$10^{-\frac{31}{20}} = 28,2mV$	$10^{-\frac{32}{20}} = 25,1mV$	$10^{-\frac{29}{20}} = 35,5mV$	$10^{-\frac{26}{20}} = 50mV$



Document réponse 2 : (Questions B-2, B-6 et B-7)

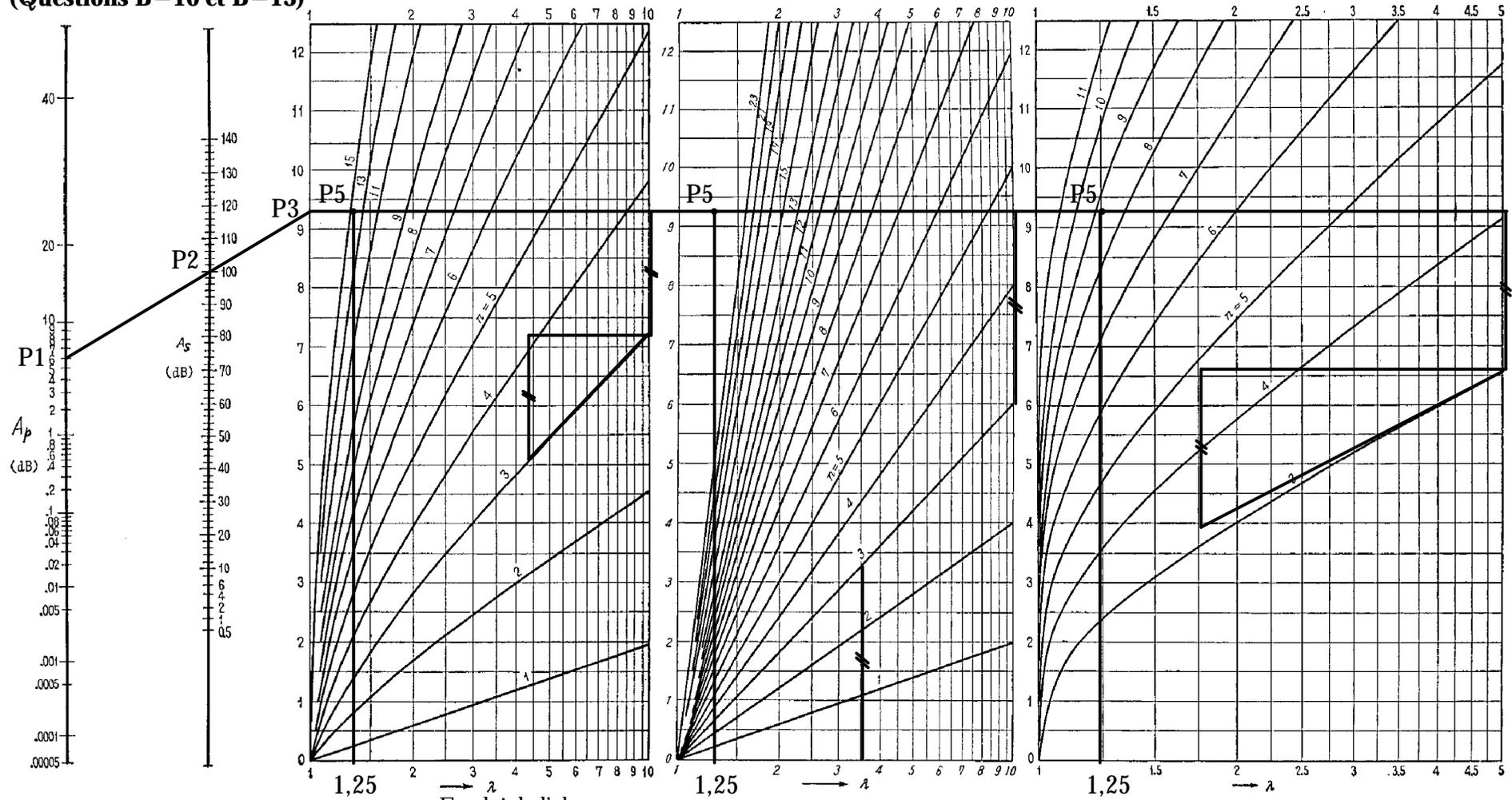
Le choix de l'échelle verticale est laissé au candidat, qui graduera donc (grossièrement) l'axe vertical de chacun des diagrammes.

Document réponse 3 :
(Questions B-10 et B-13)

Tchebycheff

Butterworth

Cauer



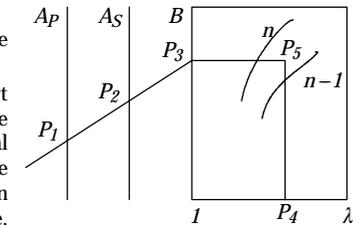
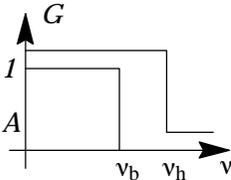
Abaques de Kawakami

Emploi de l'abaque :

- placer une règle sur l'échelle de gauche, en P_1 , où figure l'écart tolérable A_p dans la bande passante ;
- placer l'autre extrémité de la règle sur l'échelle de droite, en P_2 , où figure l'atténuation minimale A_S requise dans la bande coupée ;
- ces deux points P_1 et P_2 définissent une droite qui, prolongée, coupe l'axe vertical de l'abaque en P_3 ;
- par ce point d'intersection P_3 on trace une parallèle à l'axe horizontal de l'abaque ;
- l'axe horizontal de l'abaque est gradué en rapport $\lambda = v_h/v_b$, rapport des fréquences qui limitent la zone transitoire tolérée ; du point P_4 de l'axe horizontal qui correspond à cette valeur, on élève une verticale qui va couper l'horizontale précédemment tracée en un point P_5 qui indique l'ordre nécessaire n du filtre.

Exemple de gabarit

G : gain
 v_b : fréquence de coupure basse
 v_h : fréquence de coupure haute
 zone transitoire $v_b - v_h$



Document réponse 4 : (Question C–4)

	<i>valeur</i>	<i>a2</i>	<i>a1</i>	<i>surface</i>
C ₁	0,01 pF	2,2 μm	5,2 μm	27 μm ²
C ₂	0,1 pF	7,3 μm	10,3 μm	106 μm ²
C ₃	1 pF	23,5 μm	26,5 μm	702 μm ²
C ₄	10 pF	75 μm	78 μm	6084 μm ²
C ₅	100 pF	237,5 μm	240,5 μm	57840 μm ²
C ₆	1 nF	751,5 μm	754,5 μm	569270 μm ²

Document réponse 5 : (Question C–6)

	<i>valeur</i>	<i>a2 (dess.)</i>	<i>a2min</i>	<i>a2typ</i>	<i>a2max</i>	<i>Cmin</i>	<i>Ctyp</i>	<i>Cmax</i>
C ₁	0,01 pF	2,2 μm	1,8 μm	2,1 μm	2,4 μm	6,7 fF	9,5 fF	13 fF
C ₂	0,1 pF	7,3 μm	6,9 μm	7,2 μm	7,5 μm	0,084 pF	0,097 pF	0,114 pF
C ₃	1 pF	23,5 μm	23,1 μm	23,4 μm	23,7 μm	0,9 pF	0,99 pF	1,1 pF
C ₄	10 pF	75 μm	74,6 μm	74,9 μm	75,2 μm	9,24 pF	10 pF	10,9 pF
C ₅	100 pF	237,5 μm	237,1 μm	237,4 μm	237,7 μm	92,9 pF	100 pF	109 pF
C ₆	1 nF	751,5 μm	751,1 μm	751,4 μm	751,7 μm	0,93 nF	1 nF	1,09 nF

Document réponse 6 : (Question C – 10)

	<i>valeur</i>	<i>a1</i>	C_{par}	C_{par}/C (%)
C ₁	0,01 pF	5,2 μm	2,8 fF	28 %
C ₂	0,1 pF	10,3 μm	9 fF	9 %
C ₃	1 pF	26,5 μm	51 fF	5,1 %
C ₄	10 pF	78 μm	417 fF	4,2 %
C ₅	100 pF	240,5 μm	3,9 pF	3,9 %
C ₆	1 nF	754,5 μm	38 pF	3,8 %

Document réponse 7 : (Question C – 13)*(dimensions en microns)*

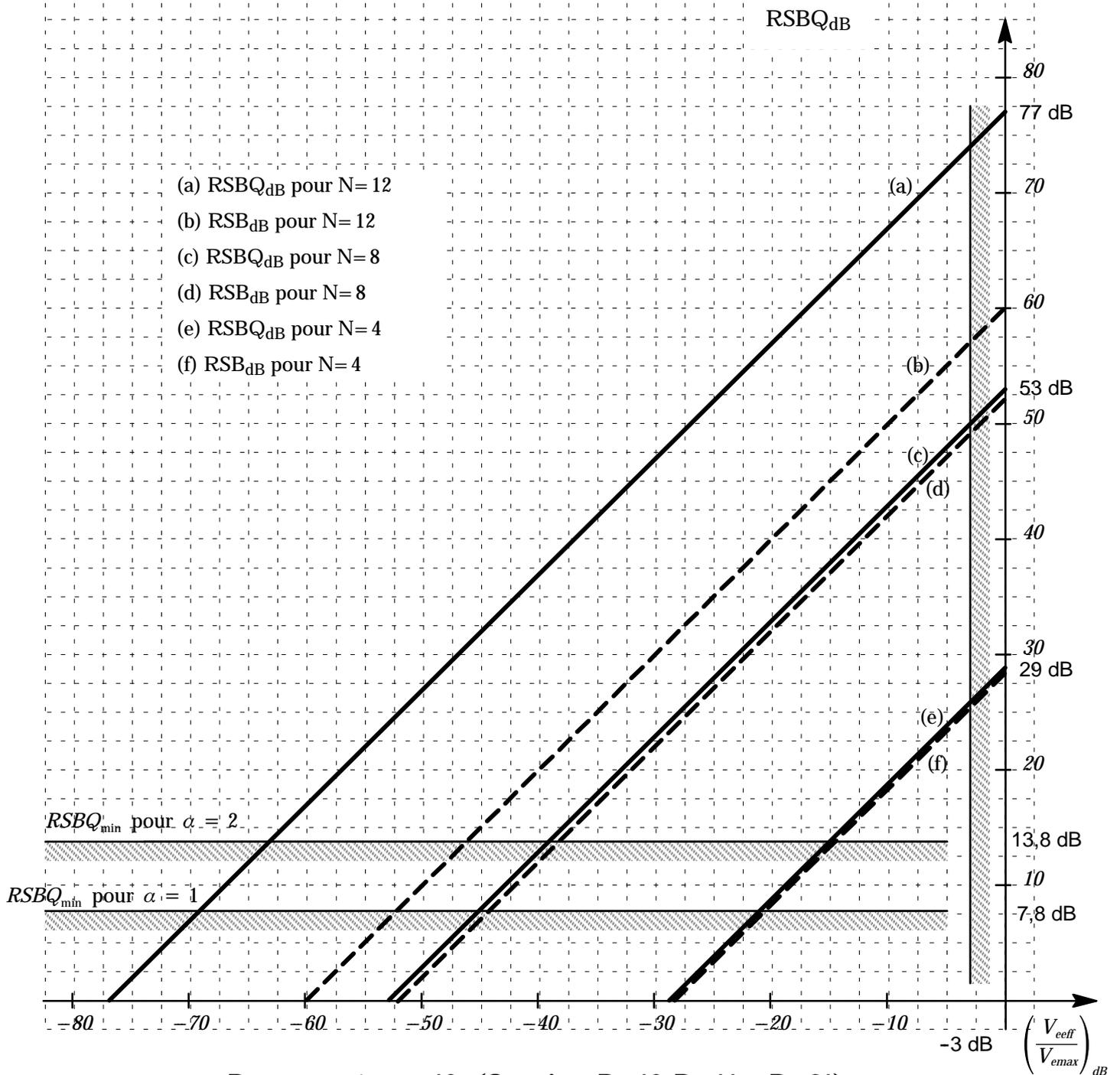
	W_{min}	D_{min}	Δe_{typ}	W_{typ}	D_{typ}	D_{typ}/W_{typ}
N+	2	1	-0,2	9,8	1,2	0,122
P+	2	1	-0,1	9,9	1,1	0,111
Poly1	1	1	-0,02	4,98	1,02	0,205
polyH	1	1	-0,05	4,95	1,05	0,212

Document réponse 8 : (Question C – 23)

	<i>min</i>	<i>typ</i>	<i>max</i>	<i>unité</i>
R ₁	10,91	15,4	20,35	kΩ
R ₂	494	662	865	kΩ
C ₂	28	30,2	32,9	pF
R ₂ C ₂	13,8	20	18,5	μs
R ₁ + 2kΩ	12,91	17,4	22,35	kΩ
R ₁ + 6kΩ	16,91	21,4	26,35	kΩ
$\frac{R_2}{R_1 + 2k\Omega}$	38,2	38	38,7	
$\frac{R_2}{R_1 + 6k\Omega}$	29,2	31	32,8	

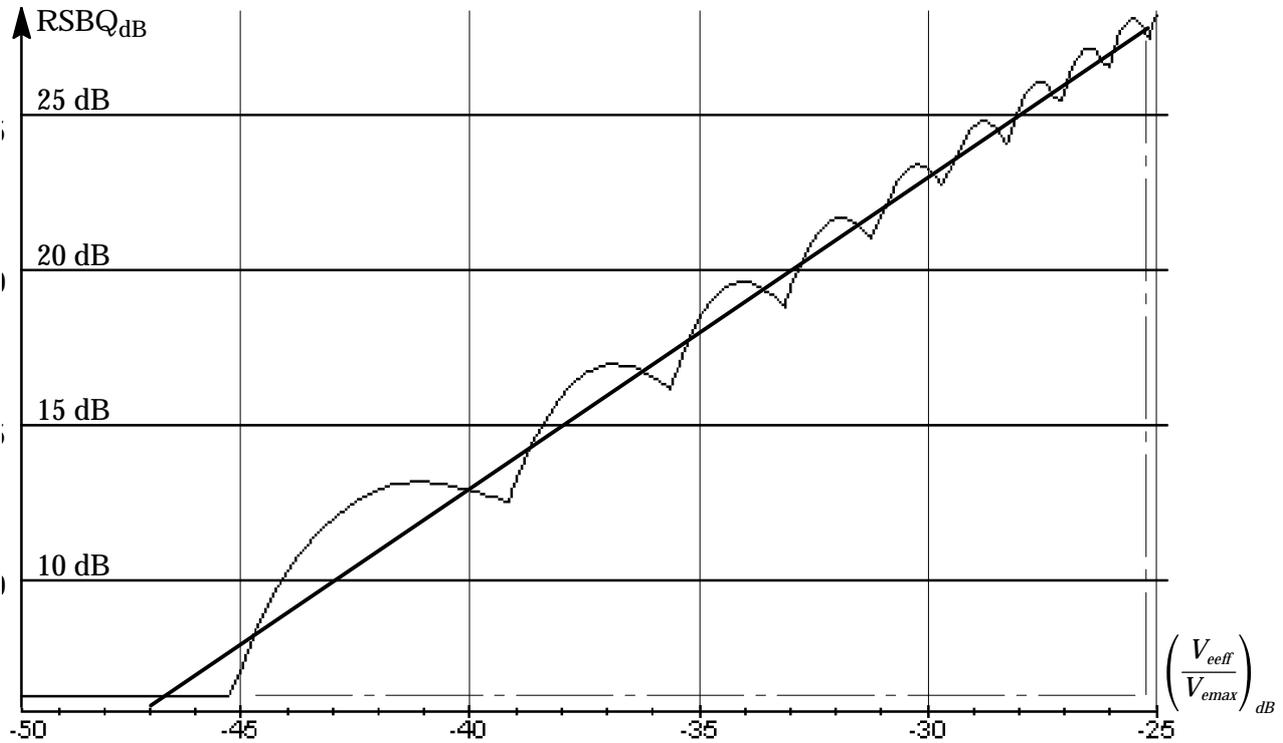
Document réponse 9 : (Question C – 32)

	<i>en² @ 10 Hz</i>	<i>en² @ 100 kHz</i>	<i>α</i>	<i>b</i>	<i>b/a</i>
OP01B	36,1 × 10 ⁻¹⁵	169 × 10 ⁻¹⁸	169 × 10 ⁻¹⁸	359 × 10 ⁻¹⁵	2125
OP02B	14,4 × 10 ⁻¹⁵	484 × 10 ⁻¹⁸	484 × 10 ⁻¹⁸	139 × 10 ⁻¹⁵	290
OP03B	2,11 × 10 ⁻¹⁵	324 × 10 ⁻¹⁸	324 × 10 ⁻¹⁸	17,9 × 10 ⁻¹⁵	55
OP05B	360 × 10 ⁻¹⁵	841 × 10 ⁻¹⁸	841 × 10 ⁻¹⁸	3592 × 10 ⁻¹⁵	4270
OP06B	8,1 × 10 ⁻¹⁵	1089 × 10 ⁻¹⁸	1089 × 10 ⁻¹⁸	70 × 10 ⁻¹⁵	64
SB1	28,9 × 10 ⁻¹⁵	256 × 10 ⁻¹⁸	256 × 10 ⁻¹⁸	286 × 10 ⁻¹⁵	1120
<i>unité</i>	V ² /Hz	V ² /Hz	V ² /Hz	V ²	Hz



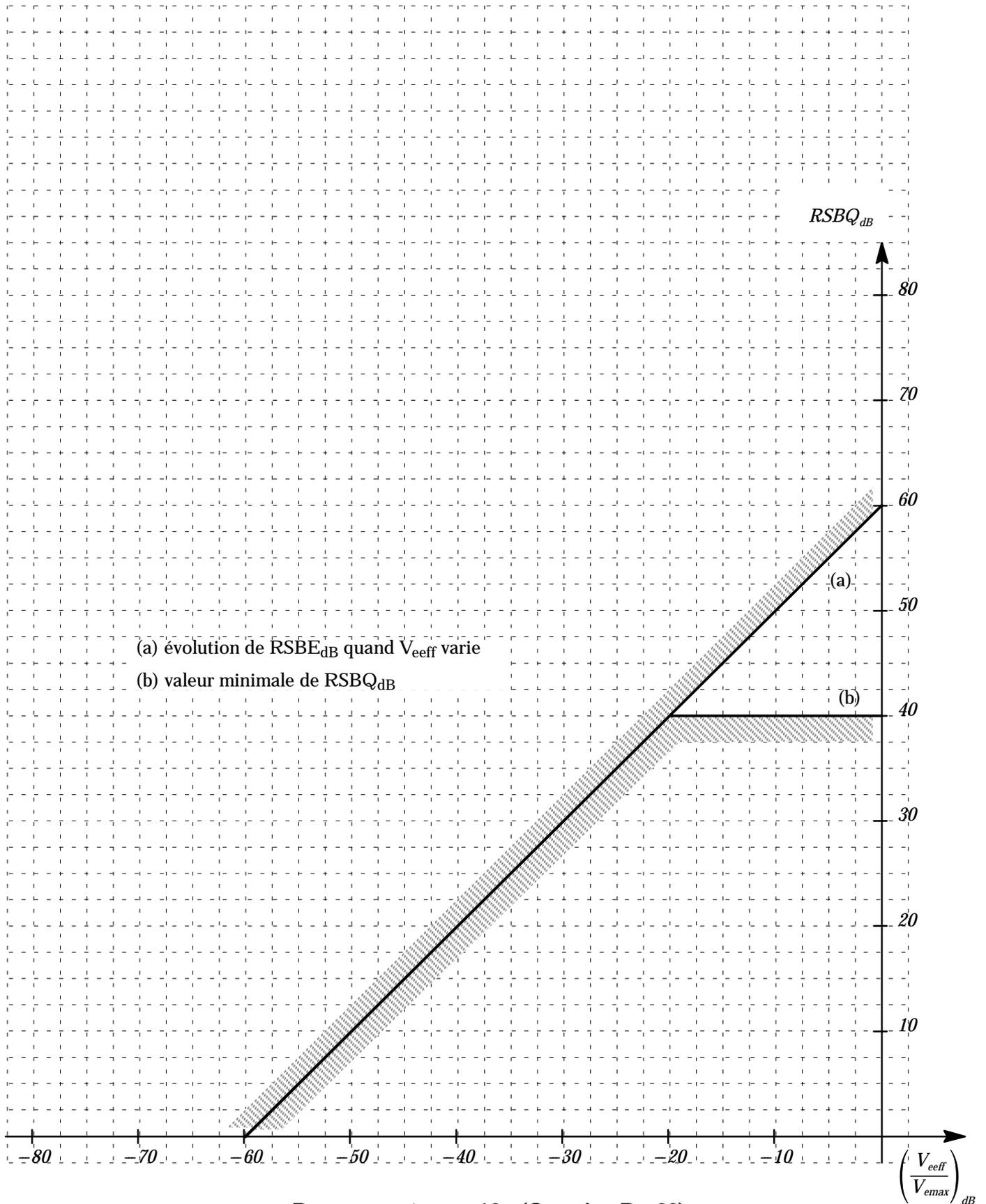
Document réponse 10 : (Questions D-10, D-11 et D-21)

Document réponse 11 : (Question D – 18)



Document réponse 12 : (Question D – 20)

N	$\frac{P_{bq}}{V_{emax}^2}$	RSB_{dB}	$RSBQ_{dB}$
4	$1,3 \times 10^{-3}$	$20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}} + 28,9$	$20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}} + 28,9$
8	$5,1 \times 10^{-6}$	$20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}} + 52,2$	$20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}} + 53$
12	2×10^{-8}	$20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}} + 60$	$20 \log_{10} \frac{V_{eff}}{V_{emax}} + 77$

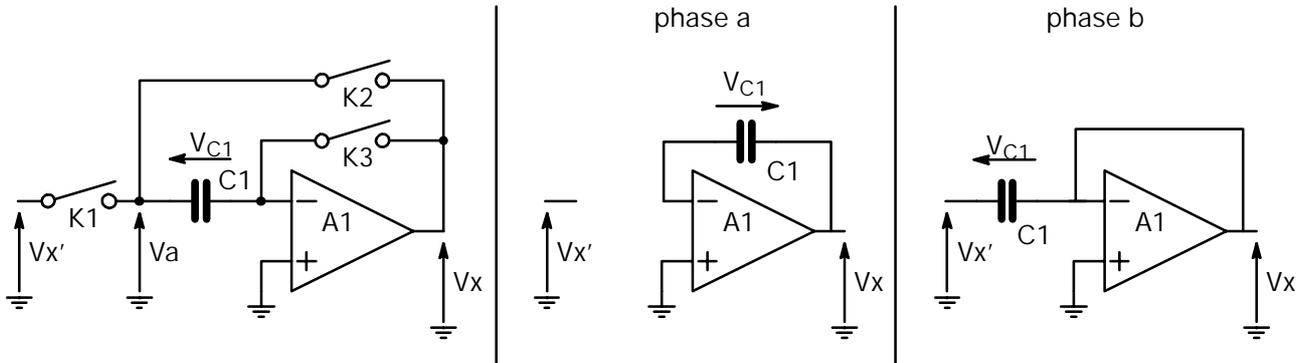


(a) évolution de $RSBQ_{dB}$ quand V_{eff} varie

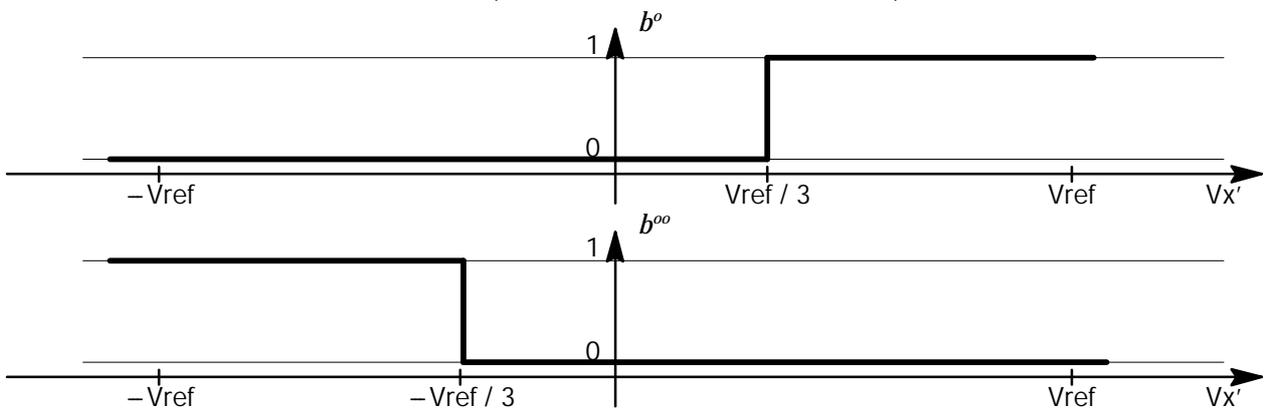
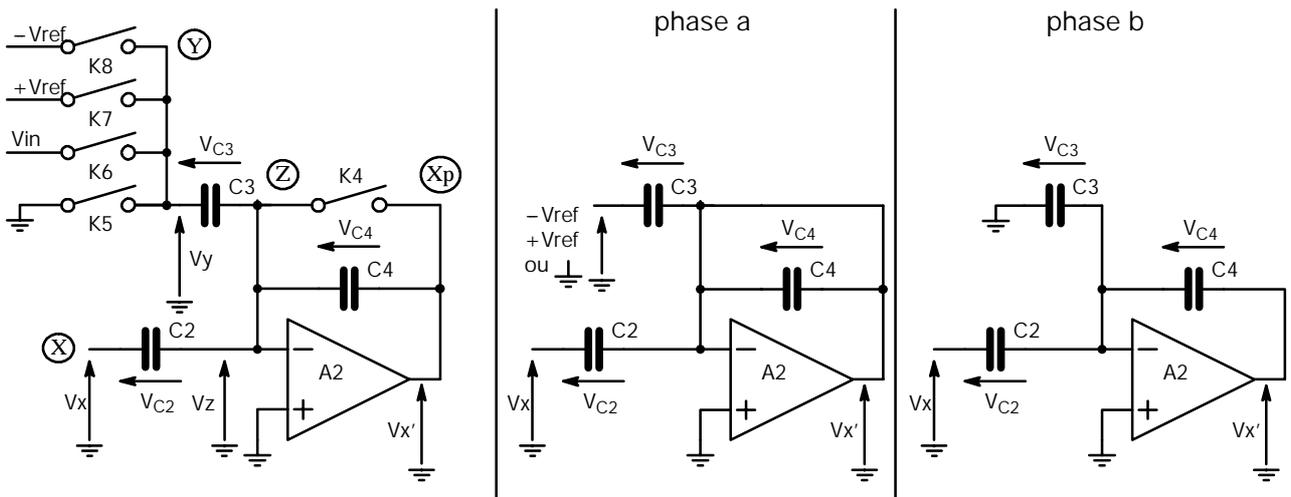
(b) valeur minimale de $RSBQ_{dB}$

Document réponse 13 : (Question D-22)

Document réponse 14 : (Question E-5)



Document réponse 15 : (Question E-8)



Document réponse 16 : (Question E-14)

Document réponse 17 : Table d'états de la machine de Mealy (Question E – 18)

État	États suivants				Sorties											
	$\overline{\text{in}}\overline{\text{t}}$		init		K1				K2				K3			
	$\overline{\text{ph}}\overline{\text{i}}$	phi		$\overline{\text{ph}}\overline{\text{i}}$												
	Entrées →	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11
0	①	9	1	①	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1			2		X	X	0	X			0				1	
2			3		X	X	0	X			0				1	
3			4		X	X	0	X			0				1	
4			④	5	X	X	0	0			0	0			1	1
5				6	X	X	X	0				0				1
6				7	X	X	X	0				0				1
7				8	X	X	X	0				0				1
8	⑧	9		⑧	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
9		10			X	0	X	X		0				1		
10		11			X	0	X	X		0				1		
11		12			X	0	X	X		0				0		
12	13	⑫			0	0	X	X	1	1			0	0		
13	14				0	X	X	X	1				0			
14	15				0	X	X	X	0				0			
15	0				0	X	X	X	0				1			

État	Sorties															
	K4				Kp5				K6				CK			
Entrées	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1			0				1				0				1	
2			1				1				0				1	
3			1				0				0				1	
4			1	0			0	0			1	1			1	1
5				0				0				1				1
6				0				0				0				1
7				0				1				0				0
8	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9		0				1				0				1		
10		1				1				0				1		
11		1				0				0				1		
12	0	1			0	0			0	0			1	1		
13	0				0				0				1			
14	0				0				0				1			
15	0				1				0				0			

Document réponse 18 : Table d'états réduite de la machine de Mealy (Question E-19)

Code	État	États suivants				Sorties											
		$\overline{\text{init}}$		init		K1				K2				K3			
	Entrées →	$\overline{\text{phi}}$	phi	$\overline{\text{phi}}$		00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10
0000	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0001	1	2	2	2	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0011	2	3	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0010	3	0	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0110	4	1	4	4	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0111										1	1				1	1	1
0101										1	1				1	1	1
0100						1	1	1	1	1	1			1	1	1	1
1100																	
1101																	
1111																	
1110																	
1010																	
1011																	
1001																	
1000																	

Code	État	Sorties															
		K4				Kp5				K6				CK			
Entrées →		00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10
0000	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0001	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0011	2	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0010	3	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
0110	4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0111			1	1			1	1				1	1	1	1	1	1
0101							1	1					1	1	1	1	1
0100							1	1									
1100																	
1101																	
1111																	
1110																	
1010																	
1011																	
1001																	
1000																	

Document réponse 19 : Table d'états codée, limitée aux variables d'état (Question E–20)

Sorties du registre d'état					Entrées du registre d'état															
Q3	Q2	Q1	Q0	Code	D3				D2				D1				D0			
					$\overline{\text{init}}$		init		$\overline{\text{init}}$		init		$\overline{\text{init}}$		init		$\overline{\text{init}}$		init	
					$\overline{\text{phi}}$	phi	$\overline{\text{phi}}$	phi	$\overline{\text{phi}}$	phi	$\overline{\text{phi}}$	phi	$\overline{\text{phi}}$	phi	$\overline{\text{phi}}$	phi	$\overline{\text{phi}}$	phi	$\overline{\text{phi}}$	
					0 0	0 1	1 1	1 0	0 0	0 1	1 1	1 0	0 0	0 1	1 1	1 0	0 0	0 1	1 1	1 0
Q2	$\overline{\text{Q2}}$	$\overline{\text{Q1}}$	$\overline{\text{Q0}}$	0000					0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
			Q0	0001					0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
		Q1	$\overline{\text{Q0}}$	0011					0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
			Q0	0010					0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
	Q1	$\overline{\text{Q1}}$	$\overline{\text{Q0}}$	0110					0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
			Q0	0111									1	1	1	1	1			1
		Q0	$\overline{\text{Q0}}$	0101									1	1	1	1	1	1	1	1
			Q0	0100														1	1	
Q1	$\overline{\text{Q1}}$	$\overline{\text{Q0}}$	$\overline{\text{Q0}}$	1100																
			Q0	1101																
		Q0	$\overline{\text{Q0}}$	1111																
			Q0	1110																
	Q0	$\overline{\text{Q0}}$	$\overline{\text{Q0}}$	1010																
			Q0	1011																
		$\overline{\text{Q0}}$	$\overline{\text{Q0}}$	1001																
			Q0	1000																

Document réponse 20 : Décodage des états de la machine asynchrone (Question E–24)

					$\overline{Kp5}$			Kp5				
					$\overline{K6}$		K6			$\overline{K6}$		
					\overline{CK}	CK		\overline{CK}		CK		\overline{CK}
					000	001	011	010	110	111	101	100
$\overline{K1}$	$\overline{K2}$	$\overline{K3}$	$\overline{K4}$	0000		E13						
			K4	0001		E10						
		K3	$\overline{K4}$	0011		E4	E5				E3	
	$\overline{K4}$		0010	E8	E7	E6				E2	E9	
	K4		0110									
	K2	$\overline{K3}$	K4	$\overline{K4}$	0111		E11					
K4				0101								
$\overline{K4}$			0100		E12							
K3		$\overline{K4}$	1100									
		K4	1101									
		K4	1111									
$\overline{K2}$	K3	$\overline{K4}$	1110									
		$\overline{K4}$	1010							E1	E0	
	K4	$\overline{K4}$	1011									
		$\overline{K4}$	1001									
K1	$\overline{K2}$	$\overline{K3}$	$\overline{K4}$	1000								